

الفصل الثالث

التنظيم الإداري والتكنولوجي لمنشأة صناعية

في سبيل بلوغ الأهداف التي يسعى إليها المصنع والتي أقيم من أجلها ينبغي حصر الفعاليات والأنشطة الضرورية لإنجاز الأعمال فيه بصيغة متكاملة ومن ثم العمل على توحيدها بشكل متوازن ومنسق لمنع الإزدواجية في الأعمال إنشاء تنفيذها ولضمان ذلك تتحتم الضرورة اللجوء إلى كيان تنظيمي يبدأ بتقسيم الفعاليات إلى مجموعات ومن ثم تعيين لكل مجموعة أحد المرؤوسين ويخول الصلاحيات اللازمة لإنجاز العمل الخاص بمجموعته، لذا يجب إتباع الخطوات التالية :

- 1- تحديد الأهداف العامة للمصنع متمثلة بكميات ونوعيات السلع المطلوب إنتاجها.
- 2- تكوين الخطط والسياسات لبلوغ هذه الأهداف من خلال تصميم المسالك التكنولوجية اللازمة لعمليات التصنيع.
- 3- تعيين الأعمال والواجبات الرئيسية لتنفيذ الخطط والوصول إلى الأهداف بتهيئة المواد والمكانات والمعدات اللازمة للعمل والمهارات المطلوبة والجداول الزمنية للتشغيل والصيانة والإدامة.
- 4- تحديد الوظائف اللازمة لإنجاز الأعمال بكفاءة من خلال تحديد الهيكل التنظيمي الملائم.
- 5- تجميع هذه الوظائف على شكل مجموعات للحصول على أحسن النتائج التي يهدف إليها المصنع وتعيين رئيس لكل مجموعة يشرف على وظائفها.
- 6- منح الصلاحيات الضرورية لكافة رؤساء المجموعات وبالقدر الذي يمكنهم من القيام بأعمالهم بشكل سليم.

ومن البديهي إن أي إداري لا يستطيع أن يكون رئيساً لعدد غير محدود من الأفراد ،وعلى الأخص في مستويات الإدارة العليا . ومن خلال دراسة أجريت على أكثر من 1000 شركة أمريكية أثبتت هذه الدراسة إنه للمحافظة على مدى سيطرة المدير على منتسبيه بكفاءة يكون عدد موظفيه بالحالة العامة بما لايزيد عن 10 أشخاص مع الأخذ بنظر الاعتبار الإستخدامات الواسعة للحاسب الأليكتروني لأغلب نشاطات المصانع.

3-1- أنواع التنظيمات والمستويات الإدارية المناظرة:

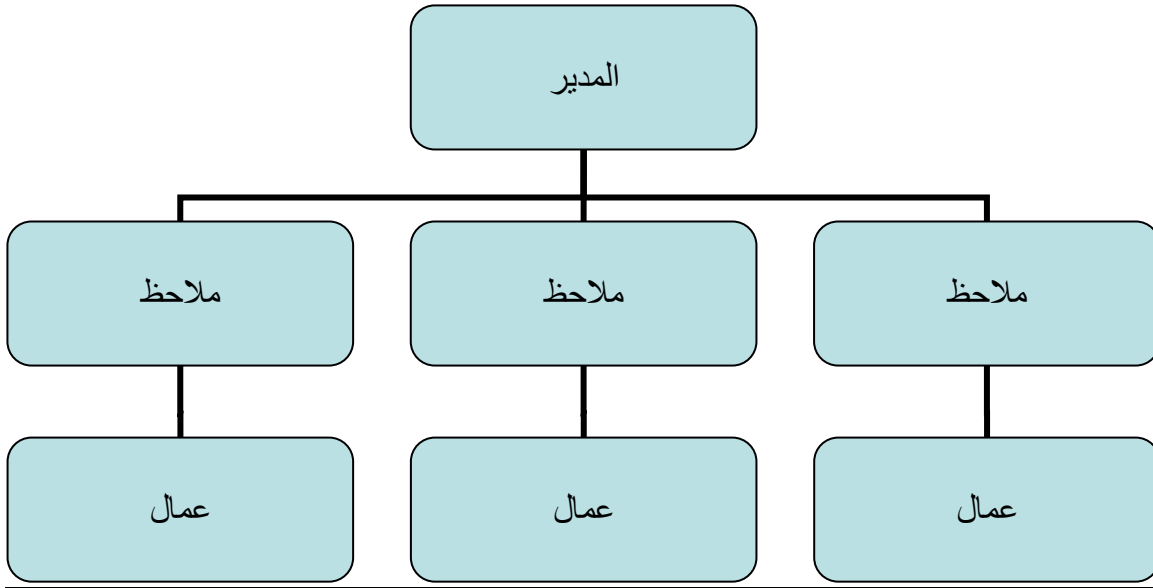
لكل مصنع يكون فيه خارطة تنظيمية تمثل العرض التخطيطي لمختلف الصلاحيات والمسؤوليات في المصنع والوصف لطرائق الإتصالات والإرتباطات بين كافة الأقسام وعلى كافة المستويات الإدارية . ومن هذه التنظيمات :

1- التنظيم الخطي (التنظيم البسيط) : يستخدم في المصانع الصغيرة ، إذ يكون مدير

المصنع المسؤول عن كافة الأعمال الفنية والمالية، أما المستويات التنفيذية (العمال)

تكون على هيئة مجاميع تعمل كل منها تحت إشراف ملاحظ يكون بدوره مرؤوساً من

قبل المدير الأعلى، وكما موضح أدناه :



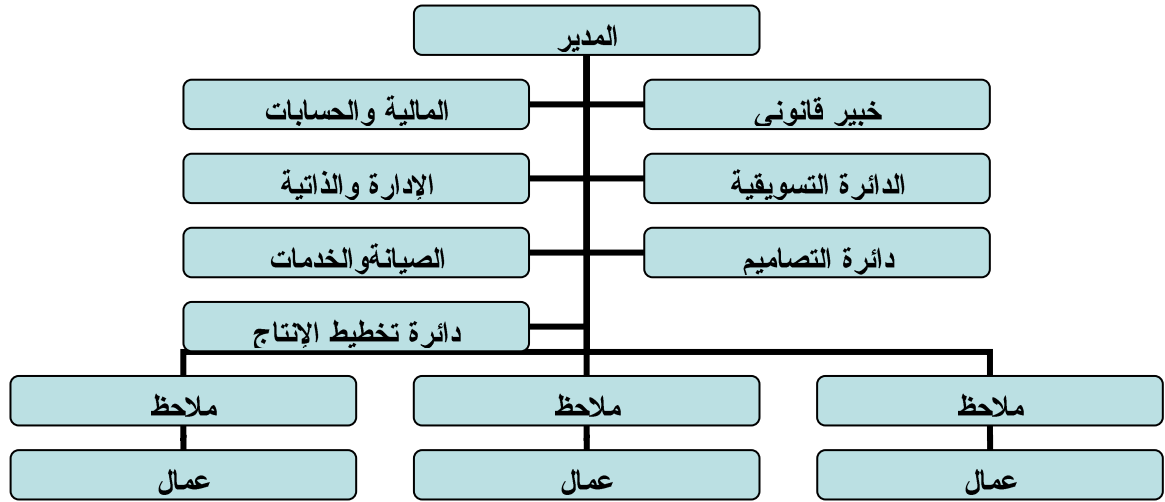
مهام المدير وضع السياسة العامة للمصنع وتهيئة كافة الخدمات الضرورية لعمليات الإنتاج وتوزيع الواجبات على العاملين ومراقبة التكاليف والسيطرة على عمليات صرف الأجور.

مهام الملاحظ تحديد طريقة العمل وتوزيع الأعمال على العمال ومراقبة فعاليات الإنتاج .
مهام العمال إداء وتنفيذ الأعمال بكفاءة ووفق التعليمات .
مزاياه :

- أ- الإبتعاد عن الغموض والتعقيد لمعالم المسؤولية والسلطة.
 - ب- السرعة في إتخاذ القرارات الإدارية ونقل المعلومات بين المستويات .
 - ج- زيادة المتابعة والرقابة على تنفيذ الأعمال.
 - د- يمكن من خلاله معالجة المشاكل بسرعة في الحالات الطارئة.
- عيوبه :

- أ- لايمكن تطبيقه في المصانع الكبيرة الحجم.
- ب- تركيز السلطة لدى المدير وفي حالة غيابه يتخبط المصنع في تحقيق أهدافه.
- ج- ضعف التعاون الجماعي بين عمال المصنع بسبب خصوصية كل ملاحظ عمل في إشرافه على مجموعته.

2- التنظيم الخطي الإستشاري : يستخدم في المصانع ذات الحجم المتوسط وهو نفس الإستلوب السابق بإضافة مستشارين وخبراء يستعين بهم المدير ليقدموا الإستشارات والنصائح الفنية والمالية لأجل تنفيذ الأعمال ، وكما موضح أدناه :

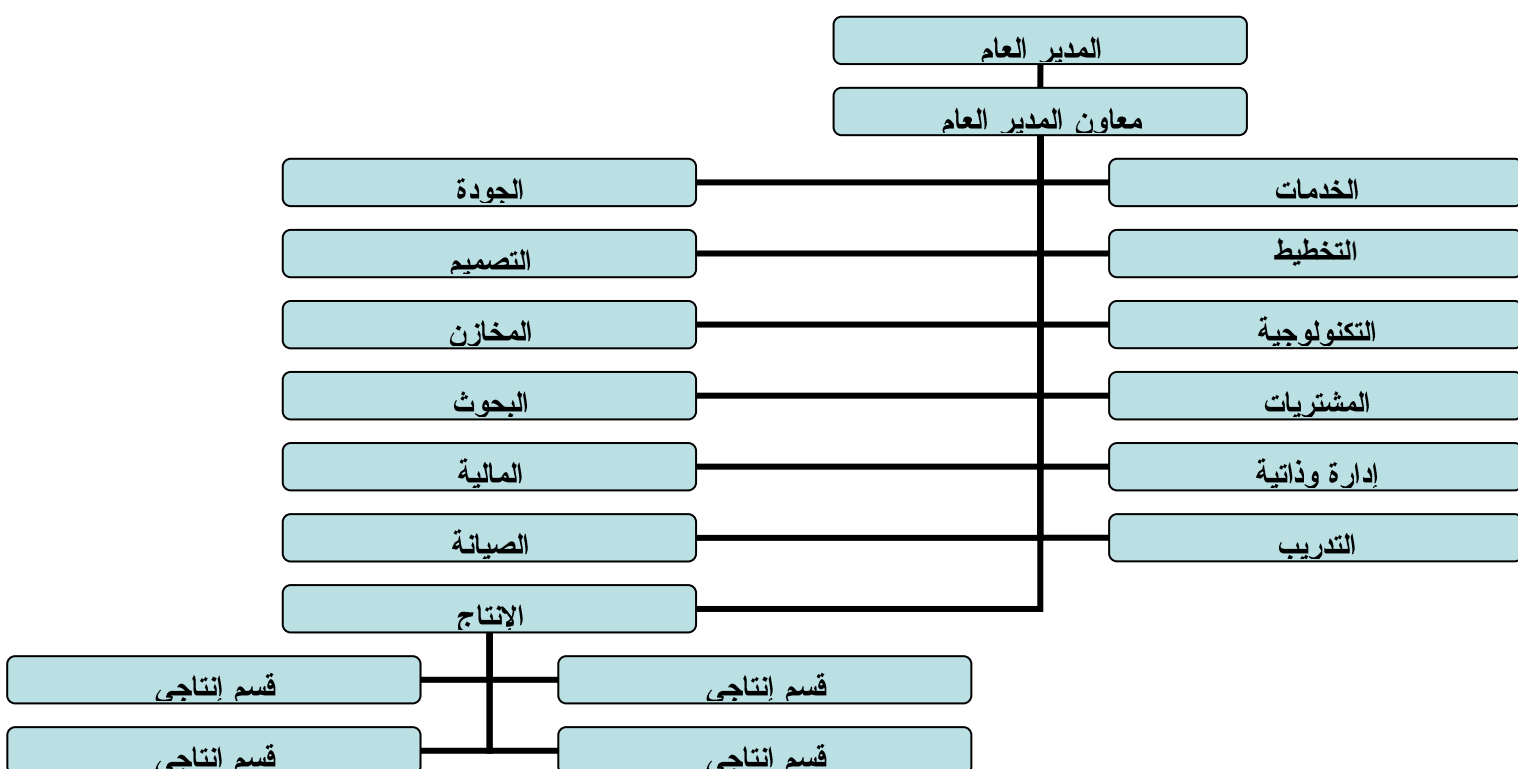


مزاياه :

- 1- سرعة معالجة المشاكل نتيجة الاستفادة من الخبرات المتوفرة في المصنع.
- 2- سهولة إنجاز المهام المطلوبة لإنفصال الأعمال الفنية عن الأعمال الإدارية.
- 3- تنمية خبرات المدراء العاملين بسبب وجود إرشادات ونصائح الخبراء.
- 4- نجاح المدراء في إتخاذ القرارات الصائبة نتيجة لوجود الخبراء.

عيوبه :

- 1- تعذر إتخاذ قرارات سريعة لإعتمادها على آراء مجموعة الخبراء.
 - 2- ضعف سلطة المدير بسبب إعتماده على الخبراء.
 - 3- يساعد المدير على التهرب من المسؤولية بسبب تعليق أخطاءه على الخبراء.
- 3 - التنظيم الوظيفي : يتضمن تجميع الفعاليات الرئيسية والفرعية في المصنع بوظائف ومن ثم تخصيص الوظائف لأقسام يشتمل كل منها على وظيفة معينة وعادة ما يستخدم هذا التنظيم في المصانع الكبيرة التي تتعدد فيها العمليات الصناعية والسلع المنتجة وتكثر أنشطتها ويكون التنظيم داخل مختلف الأقسام خطي ، وكما موضح أدناه :



ينقسم هذا الهيكل التنظيمي إلى ثلاثة أنواع :

مستوى الإدارة العليا - أي إن المدير العام ومعاونيه تكون الصلاحيات الممنوحة لهم واسعة. مستوى الإدارة المتوسطة - يتضمن رؤساء كافة الأقسام ووكلاتهم ومدراء الشعب ، ويختلف هذا المستوى عن المستوى الأول في زيادة عدد الأشخاص وقلة الصلاحيات المخولة لهم ويهتم بوضع التفصيلات للأوامر من الإدارة العليا وإبلاغها للإدارة المباشرة ورقابتها ومتابعة تنفيذها. مستوى الإدارة المباشرة - يتضمن رئيس العمل وملاحظ العمل ويتولى هذا المستوى مسألة الإشراف على عمال وموظفي المصنع .

أكدت الدراسات والبحوث على إن النسبة المقبولة بين الرئيس والمرؤوس تتراوح بين 10-12 في المستويات الدنيا وتتراوح بين 1-6 في المستويات العليا وإذا أخذنا الحد الأعلى لكل مستوى من المستويات السابقة ، نلاحظ من الجدول أدناه عدد المشرفين الإداريين وعدد العمال والموظفين الضروري لكل مرحلة :

عدد المشرفين الإداريين	عدد العمال والموظفين	المستوى الإداري
1	—	مدير عام
$7 = 6 + 1$	$72 = 12 * 6$	م.مدير عام
$43 = 6 * 6 + 7$	$432 = 12 * 6 * 6$	رئيس قسم
$259 = 6 * 6 * 6 + 43$	$2592 = 12 * 6 * 6 * 6$	وكيل رئيس قسم
$1555 = 6 * 6 * 6 * 6 + 259$	$15552 = 12 * 6 * 6 * 6 * 6$	مدير شعبة
$9331 = 6 * 6 * 6 * 6 * 6 + 1555$	$93312 = 12 * 6 * 6 * 6 * 6 * 6$	ملاحظ عمل

من أعلاه نلاحظ إن عدد المشرفين الإداريين الضروري لإدارة أية منشأة صناعية تضم على الأكثر 72 عاملاً وموظفاً هو 7 مشرفين وهكذا لبقية المراحل .

مزاياه :

1- يحقق مبدأ التخصص.

2- تحديد المسؤوليات على مختلف الأعمال.

عيوبه :

1- صعوبة الإتصالات والتنسيق بين مختلف الأعمال.

2- تعذر إتخاذ القرارات الصائبة بشكل سريع.

3-2- التنظيم التكنولوجي :

هو دراسة كيفية ترتيب وتوالي المراحل الإنتاجية اللازمة لتصنيع سلعة أو مجموعة سلع لأجل تحديد نوع المكانن اللازمة وعددها ومواقعها المناسبة لإتمام العمليات التصنيعية باقل دورة إنتاجية ممكنة. أما العوامل المؤثرة على التنظيم التكنولوجي :

1- نوع الصناعة :

أ- الصناعة الإستخراجية - تتضمن عمليات إستخراج الخامات الطبيعية من باطن الأرض ومن ثم عزل المواد الغريبة والشوائب منها مثل صناعة الحديد والصلب .

ب- الصناعة التحويلية - تتميز بإجراء التغييرات والتحويلات من حيث الشكل على الخامات والمواد المستخرجة وتحويلها إلى شكل آخر قابل للإستعمال المباشر أو الإستفادة منها في صناعات تحويلية أخرى مثل صناعة الزجاج . وأنواعها :

- الصناعات المعدنية : تهتم بفصل الشوائب من الخامات ومن ثم تشكيل سبائك والواح وصفائح في عمليات الدرفلة.

- الصناعات الهندسية : تحويل منتجات الصناعات المعدنية إلى سلع إستهلاكية عن طريق إجراء عمليات السباكة والدرفلة أو الطرق والكبس كمراحل أولية ومن ثم مرحلة القطع وإجراء المعاملات الحرارية والربط بكافة أنواعه مثل صناعة السيارات والمحركات .

- الصناعات الكيماوية : تتضمن تحويل الخامات من حالتها الإعتيادية إلى مواد جديدة ذات فائدة بإتباع العمليات الفيزيائية والكيماوية مثل صناعة تكرير البترول والأسمدة والأصباغ.

- صناعة الغزل والنسيج : تتضمن تحويل الألياف إلى غزل التي تنسج بدورها وتلون بأصباغ مختلفة مثل صناعة الأقمشة.

2- حجم الإنتاج : يصنف إلى:

- أ- الإنتاج المستمر - يتصف باستمرارية العمليات وتتابعها بشكل ثابت وبدون إجراء أي تغييرات وتبديلات سريعة عليها والدفعات الإنتاجية كبيرة والمواد الأولية المستخدمة فيها ذات مواصفات متجانسة وقليلة الأنواع. وعليه فإن التنظيم يكون سهل وعمليات التخطيط والسيطرة لا يحتاجان إلى جهد كبير ومهارة عالية مثل صناعة السكر والأسمدة .
- ب- الإنتاج التعاقدى - هو تصنيع المنتجات حسب الطلبات المقدمة للمصنع مثل صناعة الطائرات والسفن والأجهزة الطبية المعقدة، يمتاز الإنتاج بإرتفاع تكاليفه ودفعاته صغيرة .
- خواصه :

- يحتاج الإنتاج إلى وقت غير قليل.
 - تتميز الدورة الإنتاجية بطول الفترة الزمنية التي تستغرقها ومستوى عالي من المهارة والخبرة.
 - كثرة التخزين في مراحل التصنيع.
 - صعوبة السيطرة على العمليات الإنتاجية .
- ج- الإنتاج المتكرر - يجمع بين الإنتاج المستمر والإنتاج التعاقدى ويستخدم في الصناعات الهندسية كصناعة السيارات والمعدات الكهربائية . خصائصه:
- تتطلب عملية التخطيط والتشغيل مستوى عالي من الخبرة والمهارة .
 - تتطلب التنسيق والتوازن المحكم بين مختلف عمليات التشغيل.
 - يحتاج إلى مرونة عالية في عمليات إنتاج السلع.
- 3- طبيعة ومواصفات السلعة : تتمثل بحجم السلعة ووزنها وأبعادها المختلفة ودرجة السيولة والصلابة التي تتصف بها وخطورة المواد المركبة واللازمة لتصنيعها مثل إنتاج السوائل والحوامض والبتروول ، إذ إنه عند تصميم تعاقب المكائن يؤخذ بنظر الاعتبار الخواص الكيماوية والفيزيائية والهندسية للسلع المنتجة.

3-3- دورة الإنتاج :

هو الزمن الذي تستغرقه العملية الإنتاجية منذ دخول المواد الأولية ولغاية خروجها كسلع جاهزة للإستعمال . وإن تقليص هذا الزمن يعتبر دليلاً ومؤشراً على بلوغ الإدارة المستوى الجيد من التخطيط والتنظيم . مكوناته :

1- وقت الإدارة T_1 : ويتضمن وقت تهيئة الماكينة وإعدادها للتشغيل عند بداية كل عمل .

2- وقت التشغيل الآلي T_2 : ويتضمن الوقت الذي تستغرقه الماكينة لإداء العمل .

وعليه فإن زمن دورة الإنتاج T سيكون : $T = T_1 + T_2$

وإن الإنتفاع الكامل من الوقت المتاح يتحقق عندما $\frac{T}{T_2} = 1$ وإن إرتفاع هذا العامل عن الواحد يدل على سوء تنظيم العمليات والنشاطات الإنتاجية .

ولإختيار الأسلوب الملائم لحركة مواد العمل خلال المراحل الإنتاجية يساعد في تقليل زمن دورة الإنتاج وبشكل عام هناك ثلاثة طرق لهذه الحالة هي :

1- الحركة المتوالية : تستخدم عند إنتاج السلع ذات الأحجام الكبيرة وبمواصفات مختلفة والزمن لكل مرحلة متباين بشكل كبير مع المراحل الأخرى ، وتعتمد على إن كل عامل عندما ينجز مرحلته يتم تسليم كافة السلع التي أنجزها إلى العامل الذي يليه في المرحلة.

2- الحركة المتوازية : تستخدم في إنتاج السلع المتشابهة في الحجم والمواصفات ومتقاربة في الزمن ، وفيها يقوم العامل بتسليم كل قطعة تنجز إلى العامل الذي يليه في المرحلة الأخرى .

3- الحركة المزدوجة : تجمع بين الحركتين المتوالية والمتوازية ، أي عندما تكون مواصفات الإنتاج متجانسة والزمن متباين لمختلف المراحل.

مثال-1 - بإفتراض إن المسلك التكنولوجي اللازم لتصنيع سلعة ما يتكون من خمس مراحل وعدد السلع في كل دفعة هي أربعة ، وإن الوقت الضروري لتنفيذ كل مرحلة هو:

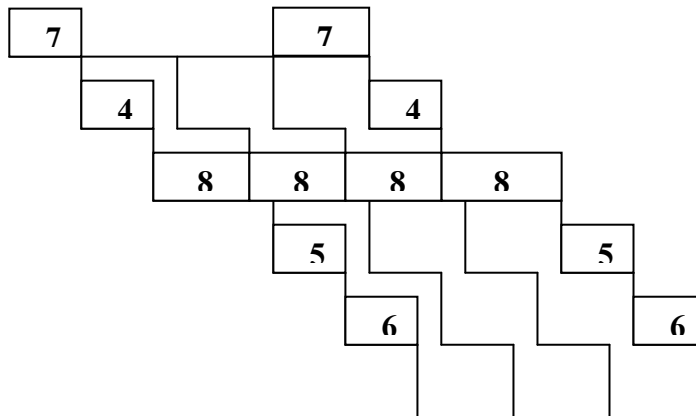
المرحلة الإنتاجية	الوقت المخصص لكل مرحلة(دقيقة)
1	7
2	4
3	8
4	5
5	6

ماهو الوقت اللازم لإنتاج هذه السلع في حالة : الحركة المتوالية ، الحركة المتوازية والحركة المزدوجة .

أ- في حالة الحركة المتوالية : الوقت اللازم لإنتاج هذه السلع ، هو :

$$(7 + 4 + 8 + 5 + 6) * 4 = 120 \text{ min.}$$

ب- في الحركة المتوازية :



الوقت اللازم لإنتاج هذه السلع هو :

$$7 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 5 + 6 = 54 \text{ min.}$$

ج- في حالة الحركة المزدوجة : الوقت اللازم لإنتاج هذه السلع T هو :

وقت الحركة المتوالية - مجموع أقصر وقت بين أي مرحلتين متتاليتين * عدد السلع الخاضعة للتوازي .

عدد السلع الخاضعة للتوازي هي : $4 - 1 = 3$

$$T = 120 - (4 + 4 + 5 + 5) * 3 = 66$$

3-4- أنواع التنظيمات التكنولوجية :

1- التنظيم السلعي - يستخدم عند تصنيع سلعة واحدة او عدد قليل من السلع ذات المواصفات المتشابهة ويكون ترتيب المكائن به إنسياب المواد الأولية من بداية الخط الإنتاجي مروراً على مختلف المراحل المتتابعة لتنتهي على هيئة سلعة جاهزة عند نهايته .من فوائده :

أ- إختصار زمن وطول الدورة الإنتاجية .

ب- زيادة كمية الإنتاج وخفض كلفته.

ج- تقليل الحاجة إلى المساحات الواسعة.

د- تحسين مستوى الإنتاج .

هـ- تسهيل مهمة الرقابة والسيطرة على الإنتاج.

و- تقليل حجم عمليات نقل المواد داخل الأقسام.

2- التنظيم الوظيفي - يستخدم عند إنتاج عدد كبير من السلع المختلفة بمواصفاتها وابعادها حيث تتواجد أقسام مختلفة في المصنع مثل قسم السباكة ، الطرق والكبس ، القطع ، الطلاء ، ...الخ. وكل قسم يقوم بمهامه ويستخدم هذا التنظيم في الصناعات الهندسية ومتطلباته:

أ- إحتياجاته إلى مكائن غير متخصصة.

ب- إحتياجه إلى أيدي عاملة ماهرة.

3- التنظيم المختلط - يجمع بين التنظيمين السلعي والوظيفي ويطبق على صناعة السيارات وصناعة المعدات الكهربائية ، إذ يعتمد على التنظيم السلعي للعمليات الإنتاجية وإتباع التنظيم الوظيفي لعمليات التجميع.

4- التنظيم الموقعي (التنظيم على أساس ثبات الموقع) - يستخدم في حالة الإنتاج التعاقدى مثلاً في صناعة الطائرات والسفن والقطارات ... إلخ. إذ يتم نقل المكائن والمعدات والعمال إلى مواقع العمل وإن كلف الإنتاج تكون عالية جداً.

الباب الثاني

بحوث العمليات

Operations Research

المصدر :

- [1] Hamdy A. Taha " Operations Research : an introduction" 6th edition (1997), Prentice-Hall.
- [2] Prem Kumar Gupta and D.S. Hira " Operations Research : an introduction" 2nd edition (1989) S. Chand & Company LTD, NewDelhi .

الفصل الرابع

البرمجة الخطية *Linear Programming*

تعتبر بحوث العمليات *Operations research* من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على حدٍ سواء . فجزورها التاريخية تمتد منذ القرن الثامن عشر وبالأذات عام 1885 حيث استخدم فردريك تايلر التحليل العلمي في طرق الإنتاج في محاولة لزيادة كمية المواد الخام المنقولة بأقل جهد ممكن . ونتيجة للمعضلات التعبوية والسوقية التي واجهت دول الحلفاء أثناء الحرب العالمية الثانية وصعوبة الحصول على حلول لهذه المعضلات من قبل جهة معينة ذات إختصاص واحد ، لذا قررت القيادة العامة لقوات الحلفاء تشكيل أول مجموعة استشارية مختلطة تضم عدد من العلماء الإختصاصيين للتعاون فيما بينهم وتقديم المشورة للقيادة ، ولقد سميت هذه المجموعة الإستشارية بفريق بحوث العمليات . لذا فقد دأب هذا الفريق منذ بداية تشكيله على دراسة الوضع العسكري لقوات الحلفاء وتقديم الأساليب العلمية لتحركات القوات المعادية ولإنزال أقصى الضربات فيها . وبعد إنتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الإختصاصيين في لجان بحوث العمليات إلى الحياة المدنية محاولين تطبيقها لحل معضلات مدنية مشابهة وتعميم دراستها في الجامعات . كما وإستفادت من تطبيقها شركات صناعية كبيرة وبالأخص المؤسسات ذات الأرباح العالية مثل الشركات النفطية . إذ إنها أول من قام بتطبيق أسلوب البرمجة في تخطيط الإنتاج وبأوسع مستوياته.

ومن أهم العوامل التي ساعدت إختصاصيي بحوث العمليات في حل المعضلات المعقدة هو تطور الحاسبات الأليكترونية إذ إنها ساعدت الباحثين في تنفيذ التحليلات والدراسات المطلوبة بسرعة وبدقة فائقتين.

أما الخطوات المتخذة في بحوث العمليات لمعالجة المعضلات هي :

- 1- تعريف المشكلة قيد البحث .
- 2- صياغة النموذج الملائم للمشكلة
- 3- إيجاد حل للنموذج .
- 4- إختبار مدى صلاحية النموذج .
- 5- تنفيذ النتائج النهائية .

أما البرمجة الخطية *Linear programming* فتعود أساسياتها إلى القرن التاسع عشر إذ قدمت من قبل كوردين في عام 1873 ووطورت في عام 1947 عندما إبتدع دانتزك الطريقة المبسطة *Simplex method* لجدولة إستلام المواد في سلاح الطيران الأمريكي . وحالياً تحتل البرمجة الخطية مركزاً مرموقاً في مجالات بحوث العمليات ، كما تكمن أهمية البرمجة الخطية في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وتعتبر أبسط وأسهل النماذج التي يمكن إنشاؤها لمعالجة

معضلات البرمجة الصناعية والحكومية الكبرى . ويمكن القول إن البرمجة الخطية هي طريقة علمية تهدف إلى استخدام الموارد المحدودة أفضل استخدام لتحقيق هدف معين .
إن المستلزمات الأساسية للبرمجة الخطية هي :

- 1- وجود هدف معين مطلوب تحقيقه (كأقصى ربح أو أدنى كلفة ... إلخ).
- 2- وجود بدائل مختلفة للوصول إلى الهدف .
- 3- الموارد المستخدمة يجب أن تكون محدودة.
- 4- وجوب العلاقة بين المتغيرات .
- 5- التعبير عن دالة الهدف والقيود بمعادلات أو متباينات خطية.

1-4- صيغ البرمجة الخطية :

1- الصيغة العامة General form : تأخذ النموذج التالي :

$$\max .or \min . \quad Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad \text{Objective function}$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_i \quad \text{Constra int s}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

إذ إن C_j تمثل الكلفة أو الزمن أو الربح أو الإيراد ... إلخ. للوحدة الواحدة.

X_j تمثل متغيرات القرار *Decision variables* .

a_{ij} تمثل المعاملات الفنية *Technical coefficients* .

b_i تمثل الكميات المتاحة للإستخدام *Availability amounts* .

2- الصيغة القانونية Canonical form : النموذج العام لهذه الصيغة يكون :

$$\max . \quad Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad \text{Objective function}$$

$$S.t. \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i \quad \text{Constra int s}$$

$$X_j \geq 0 \quad \text{nonnegative constra int s}$$

أي إنها تمتاز بالخصائص الآتية :

- 1- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة ($X_j \geq 0$) .
- 2- جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي (\leq) .
- 3- تعظيم *maximized* دالة الهدف فقط .

كما يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية بإستخدام القواعد التالية :

1- يمكن تحويل تصغير $minimized$ دالة الهدف إلى تعظيم $maximized$ وبالعكس بضرب

$$دالة الهدف في (-1) ، أي إن : $max. Z = min. (-Z)$$$

2- يمكن تحويل قيد أكبر من أو يساوي \geq إلى أصغر من أو يساوي \leq بضرب المتباينة في

$$(-1) ، أي إن : $\sum a_{ij} X_j \geq b_i \Leftrightarrow -\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$$

3- يمكن تحويل قيد المساواة (=) إلى قيدين من نوع أصغر من أو يساوي \leq وبالشكل التالي:

$$\sum a_{ij} X_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{ij} X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij} X_j \leq -b_i \end{array} \right\}$$

4- يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة $absolute value$ إلى قيدين من نوع أصغر من أو

يساوي \leq وبالشكل التالي :

$$\begin{aligned} |\sum a_{ij} X_j| \leq b_i &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{ij} X_j \leq b_i \\ -\sum a_{ij} X_j \leq b_i \end{array} \right\} \\ or \quad |\sum a_{ij} X_j| \geq b_i &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sum a_{ij} X_j \leq -b_i \\ \sum a_{ij} X_j \leq -b_i \end{array} \right\} \end{aligned}$$

5- يمكن تحويل المتغير غير المقيد في الإشارة $unrestricted sign$ إلى متغيرين غير

سالبين ، وكما في العلاقة أدناه :

$$X_i = X_i' - X_i'' \quad and \quad X_i', X_i'' \geq 0$$

3- الصيغة القياسية $Standard form$: الشكل العام لهذه الصيغة يأخذ الخصائص التالية :

1- جميع القيود تكون معادلات (القيود من نوع مساواة (=)) ماعدا قيد عدم السالبة

$nonnegative$ إذ يبقى متباينة من نوع أكبر من أو يساوي (أي إن $X_j \geq 0$) .

2- الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب (أي إن $b_i \geq 0$) .

3- دالة الهدف تكون إما تصغير $min.$ أو تعظيم $max.$.

ويمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية وبالإضافة إلى ما طرح في الصيغة القانونية ،

يمكن تحويل قيود المتباينات إلى معادلات وكما يلي :

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} X_j \leq b_i &\Leftrightarrow \sum a_{ij} X_j + S_i = b_i \\ \sum a_{ij} X_j \geq b_i &\Leftrightarrow \sum a_{ij} X_j - S_i = b_i \end{aligned}$$

إذ إن S_i تمثل متغيرات الركود $Slack variables$ وهي متغيرات وهمية وتكون غير سالبة (أي

إن $S_i \geq 0$) .

مثال-1 : حول الصيغة العامة للبرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية والصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} min. \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 \\ s.t. \quad & X_1 + X_2 - X_3 \geq -5 \\ & -6X_1 + 7X_2 - 9X_3 = 15 \\ & |19X_1 - 7X_2 + 5X_3| \leq 13 \\ & X_1, X_2 \geq 0, X_3 \text{ unrestricted} \end{aligned}$$

الحل: بإفتراض إن : $X_3 = X_3' - X_3''$
أ- الصيغة القانونية :

$$\begin{aligned} \min. \quad & Z = -2X_1 - 3X_2 - 5(X_3' - X_3'') \\ \text{s.t.} \quad & -X_1 - X_2 + (X_3' - X_3'') \leq 5 \\ & -6X_1 + 7X_2 - 9(X_3' - X_3'') \leq 15 \\ & 6X_1 - 7X_2 + 9(X_3' - X_3'') \leq -15 \\ & 19X_1 - 7X_2 + 5(X_3' - X_3'') \leq 13 \\ & -19X_1 + 7X_2 - 5(X_3' - X_3'') \leq 13 \\ & X_1, X_2, X_3', X_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

ب- الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} \max. \quad & Z = 2X_1 + 3X_2 + 5(X_3' - X_3'') \\ \text{s.t.} \quad & -X_1 - X_2 + (X_3' - X_3'') + S_1 = 5 \\ & -6X_1 + 7X_2 - 9(X_3' - X_3'') + S_2 = 15 \\ & 6X_1 - 7X_2 + 9(X_3' - X_3'') + S_3 = -15 \\ & 19X_1 - 7X_2 + 5(X_3' - X_3'') + S_4 = 13 \\ & -19X_1 + 7X_2 - 5(X_3' - X_3'') + S_5 = 13 \\ & X_1, X_2, X_3', X_3'', S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 \geq 0 \end{aligned}$$

4-2- صياغة النموذج *Formulation of the model* : يمكن صياغة النموذج الرياضي

للبرمجة الخطية حسب المعطيات المتوفرة لدى الباحث ، كما موضحة في المثال التالي :

مثال- 2 : مصنع ينتج ثلاثة منتجات A ، B و C وكل منتج ينجز من خلال ثلاثة عمليات مختلفة ، الزمن المستغرق (دقيقة) لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج والطاقة المتاحة لكل عملية (دقيقة/يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتج (ألف دينار) كانت كالآتي :

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
الربح	3	2	5	—

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتعظيم الربح الكلي . ثم

أعد صياغة النموذج لكل حالة من الحالات التالية :

أ- بإفتراض منتج رابع أضيف للعملية الإنتاجية والزمن المستغرق في العمليات الثلاثة هو (3 ، 5 و 1) على التوالي وربح الوحدة الواحدة هو 6 آلاف دينار ، وإن الطاقة المتاحة للعملية الثالثة تستغل بكاملها .

ب- بإفتراض إن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة للعمليات الثلاثة يجب أن لاتزيد عن 10 دقائق / يوم .

ج- بإفتراض إن دراسات السوق أشارت إلى أن نسبة عدد الوحدات المنتجة من المنتج A إلى عدد الوحدات المنتجة من المنتجين B و C يجب أن لاتقل عن 0.4 .

الحل : بإفتراض إن X_1 ، X_2 و X_3 تمثل عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتجات A ، B و C على التوالي . فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} \max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \leq 460 \\ & X_1 + 4X_2 \leq 420 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

أ- النموذج الرياضي يكون :

$$\begin{aligned} \max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 6X_4 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 \leq 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 + 5X_4 \leq 460 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 420 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

ب-

$$\begin{aligned} 430 - (X_1 + 2X_2 + X_3) + 460 - (3X_1 + 2X_3) + 420 - (X_1 + 4X_2) &\leq 10 \\ \rightarrow 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 &\geq 1300 \end{aligned}$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned} \max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\ & 3X_1 + 2X_3 \leq 460 \\ & X_1 + 4X_2 \leq 420 \\ & 5X_1 + 6X_2 + 3X_3 \geq 1300 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \geq 0.4 \Rightarrow X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \geq 0 \quad \text{ج-}$$

لذا فالنموذج الرياضي سيكون :

$$\begin{aligned}
\max. \quad & Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \\
s.t. \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430 \\
& 3X_1 + 2X_3 \leq 460 \\
& X_1 + 4X_2 \leq 420 \\
& X_1 - 0.4X_2 - 0.4X_3 \geq 0 \\
& X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}$$

4-3- حل نموذج البرمجة الخطية :

توجد طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية هما :

1- الطريقة البيانية *Graphical method* : تستخدم هذه الطريقة في حالة وجود عدد محدد

من المتغيرات (متغيرين أو ثلاثة فقط) ولكنها لا تعطينا الطريقة العملية لحل البرامج الخطية لأن معظم مسائل البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات .

تستند هذه الطريقة على رسم هذه القيود من نقطتي تقاطعهم مع محوري الإحداثيات ، ومن ثم تحدد المنطقة المشتركة بين هذه القيود والتي تسمى بمنطقة الحلول المقبولة *Feasible Solutions Region (F.S.R.)* ، إذ إن زوايا هذه المنطقة تمثل النقاط المتطرفة *Extreme Points* التي منها نحصل على القيم المثلى *Optimal values* للمتغيرين بحيث يحققان غاية دالة الهدف . وتعتبر هذه الطريقة الأساس في الوصول إلى الطريقة المبسطة *Simplex method* .

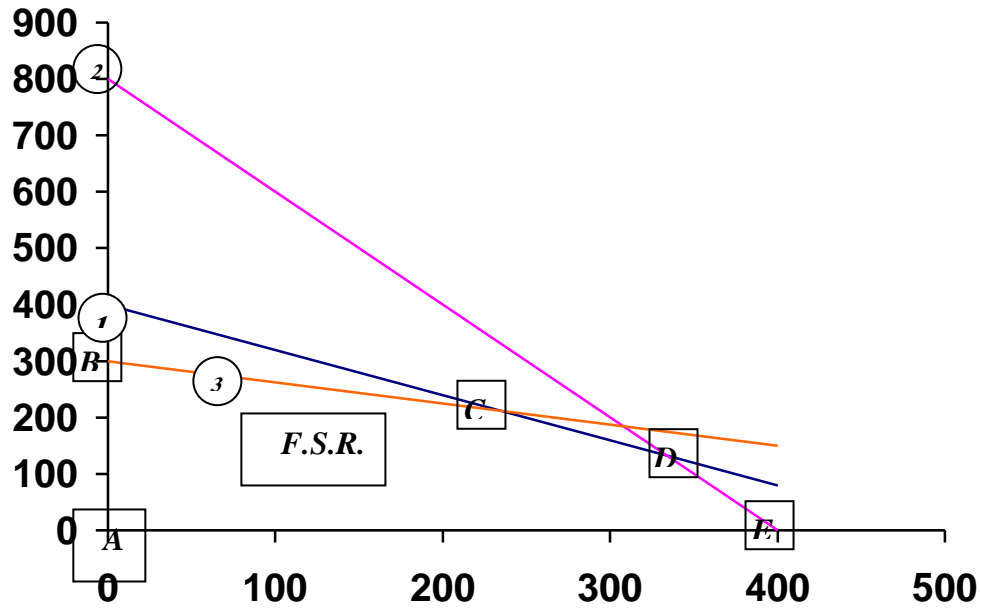
مثال-3 : حل نموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$\begin{aligned}
\max. \quad & Z = 120X + 100Y \\
s.t. \quad & 2X + 2.5Y \leq 1000 \\
& 3X + 1.5Y \leq 1200 \\
& 1.5X + 4Y \leq 1200 \\
& X, Y \geq 0
\end{aligned}$$

الحل :

1. $2X + 2.5Y = 100$ if $X = 0$ then $Y = 400 \Rightarrow (0, 400)$
if $Y = 0$ then $X = 500 \Rightarrow (500, 0)$
2. $3X + 1.5Y = 1200$ if $X = 0$ then $Y = 800 \Rightarrow (0, 800)$
if $Y = 0$ then $X = 400 \Rightarrow (400, 0)$
3. $1.5X + 4Y = 1200$ if $X = 0$ then $Y = 300 \Rightarrow (0, 300)$
if $Y = 0$ then $X = 800 \Rightarrow (800, 0)$
4. $X = 0$
5. $Y = 0$

تثبت هذه النقاط بيانياً لتحديد منطقة الحلول المقبولة (F.S.R.) .



ومن الرسم أعلاه نلاحظ إن النقاط المتطرفة هي: A ، B ، C ، D ، و E .
 بحل المعادلتين 1 و 3 أنياً فنحصل على النقطة $C(4000/17, 3600/17)$.
 بحل المعادلتين 1 و 2 أنياً فنحصل على النقطة $D(1000/3, 400/3)$.
 وبتعويض هذه النقاط المتطرفة في دالة الهدف نجد النقطة المثلى :

Points	$Z = 120X + 100Y$
$A(0,0)$	$Z = 0 + 0 = 0$
$B(0,300)$	$Z = 0 + 100*300 = 30000$
$C(4000/17, 3600/17)$	$Z = 120*(4000/17) + 100*(3600/17) = 840000/17$
$D(1000/3, 400/3)$	$Z = 120*(1000/3) + 100*(400/3) = 160000/3 \rightarrow \max.$
$E(400,0)$	$Z = 120*400 + 0 = 48000$

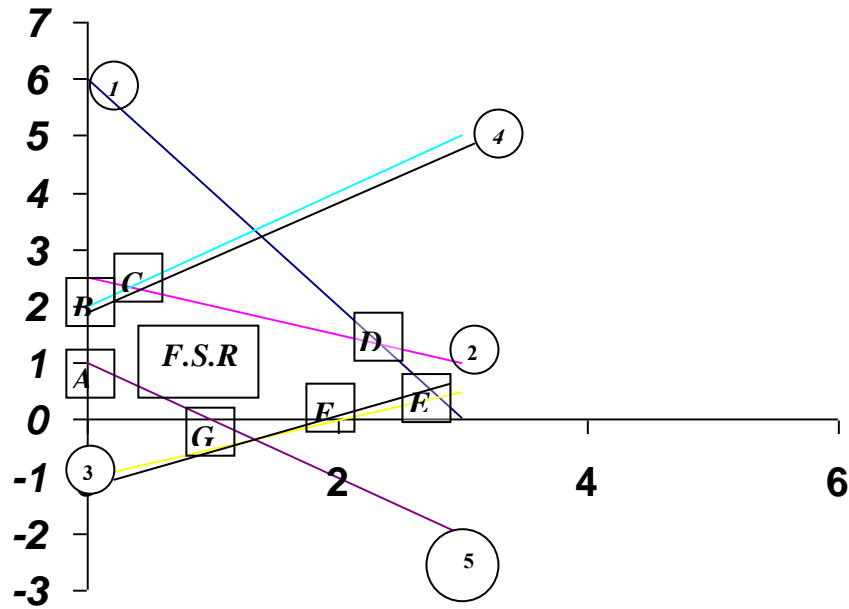
لذا فالحل الأمثل يكون $X=1000/3$ و $Y=400/3$ ، وإن قيمة دالة الهدف $Z=160000/3$.

مثال-4 : أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية لتعظيم وكذلك لتصغير دالة الهدف :

$$\begin{aligned}
 &Z = 4X + 5Y \\
 \text{s.t. } &2X + Y \leq 6 \\
 &X + 2Y \leq 5 \\
 &X - 2Y \leq 2 \\
 &-X + Y \leq 2 \\
 &X + Y \geq 1 \\
 &X, Y \geq 0
 \end{aligned}$$

الحل :

1. $2X + Y = 6$ if $X = 0$ then $Y = 6 \Rightarrow (0, 6)$
if $Y = 0$ then $X = 3 \Rightarrow (3, 0)$
2. $X + 2Y = 5$ if $X = 0$ then $Y = 2.5 \Rightarrow (0, 2.5)$
if $Y = 0$ then $X = 5 \Rightarrow (5, 0)$
3. $X - 2Y = 2$ if $X = 0$ then $Y = -1 \Rightarrow (0, -1)$
if $Y = 0$ then $X = 2 \Rightarrow (2, 0)$
4. $-X + Y = 2$ if $X = 0$ then $Y = 2 \Rightarrow (0, 2)$
if $Y = 0$ then $X = -2 \Rightarrow (-2, 0)$
5. $X + Y = 1$ if $X = 0$ then $Y = 1 \Rightarrow (0, 1)$
if $Y = 0$ then $X = 1 \Rightarrow (1, 0)$
6. $X = 0$
7. $Y = 0$



بحل المعادلتين 2 و 4 أنياً نجد النقطة $C(1/3, 7/3)$.

بحل المعادلتين 1 و 2 أنياً نجد النقطة $D(7/3, 4/3)$.

بحل المعادلتين 1 و 3 أنياً نجد النقطة $E(14/5, 2/5)$.

Points	$Z = 4X + 5Y$
$A(0, 1)$	$0 + 5 = 5$
$B(0, 2)$	$0 + 10 = 10$
$C(1/3, 7/3)$	$4/3 + 35/3 = 13$
$D(7/3, 4/3)$	$28/3 + 20/3 = 16 \rightarrow \max.$
$E(14/5, 2/5)$	$56/5 + 10/5 = 66/5$
$F(2, 0)$	$8 + 0 = 8$
$G(1, 0)$	$4 + 0 = 4 \rightarrow \min.$

لذا فالحل الأمثل يكون : أعلى قيمة إلى Z هي 16 عندما $X = 7/3$ و $Y = 4/3$.

أقل قيمة إلى Z هي 4 عندما $X = 1$ و $Y = 0$.

مثال-5 : حل نموذج البرمجة الخطية التالي بالطريقة البيانية :

$$\max. \quad Z = 2X + 4Y + 8$$

$$s.t. \quad -X + 2Y \leq 2$$

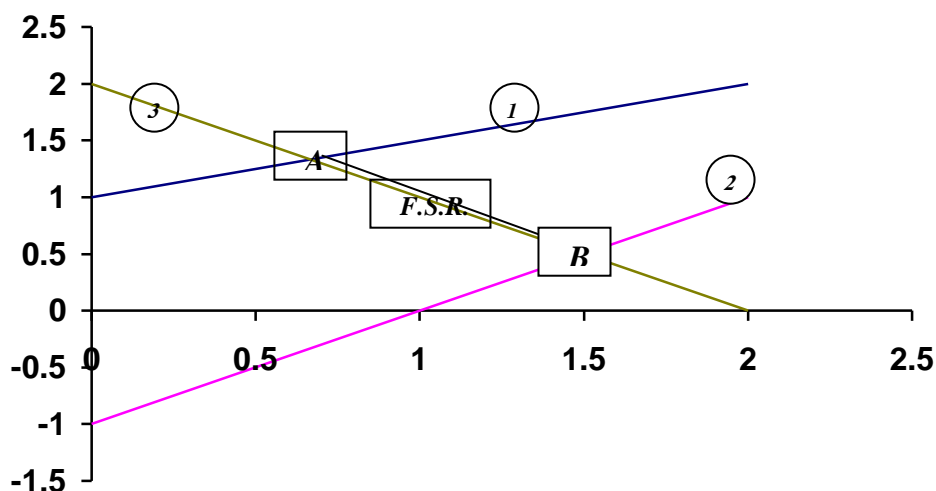
$$X - Y \leq 1$$

$$X + Y = 2$$

$$X, Y \geq 0$$

الحل :

1. $-X + 2Y = 2$ if $X = 0$ then $Y = 1 \Rightarrow (0, 1)$
if $Y = 0$ then $X = -2 \Rightarrow (-2, 0)$
2. $X - Y = 1$ if $X = 0$ then $Y = -1 \Rightarrow (0, -1)$
if $Y = 0$ then $X = 1 \Rightarrow (1, 0)$
3. $X + Y = 2$ if $X = 0$ then $Y = 2 \Rightarrow (0, 2)$
if $Y = 0$ then $X = 2 \Rightarrow (2, 0)$
4. $X = 0$
5. $Y = 0$



منطقة الحلول المقبولة هي قطعة المستقيم AB والنقاط المتطرفة في هذه الحالة ستكون النقطتين :

بحل المعادلتين 1 و 3 آنياً نحصل على النقطة $A(2/3, 4/3)$.

بحل المعادلتين 2 و 3 آنياً نحصل على النقطة $B(3/2, 1/2)$.

وعليه فإن :

Points	$Z = 2X + 4Y + 8$
$A(2/3, 4/3)$	$4/3 + 16/3 + 8 = 44/3 \rightarrow \max.$
$B(3/2, 1/2)$	$3 + 2 + 8 = 13$

لذا فالحل الأمثل هو: $X = 2/3$ و $Y = 4/3$ وإن قيمة دالة الهدف $Z = 44/3$.

2- الطريقة المبسطة Simplex method : تعتبر هذه الطريقة إحدى الوسائل الرياضية

ذات الكفاءة العالية في إستخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة ، إذ تتطابق هذه الطريقة مع الطريقة البيانية عندما $S_i = 0$ ، أما في حالة $S_i > 0$ فإن أي قيد سيتحرك نحو الأسفل بحيث يوازي نفس المستقيم عندما $S_i = 0$.

لاتبحث هذه الطريقة عن كل الحلول الأساسية الممكنة ولكنها تولد حلول مقبولة أساسية متعاقبة بحيث كل حل جديد له إمكانية تحسين دالة الهدف .

ومن الجدير بالإنتباه إلى إن هذه الطريقة تستخدم فقط عندما تكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي (\leq) بشرط $b_i \geq 0$ ، ماعدا قيد عدم السالبة إذ يبقى أكبر من أو يساوي (\geq) . أما الخطوات الرئيسية للحل فتكون :

1- تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية .

2- إختيار الحل الابتدائي الأساسي المقبول (S.B.F.S.) Starting Basic Feasible Solution

وكما موضح في الجدول أدناه :

		C_1	C_2	\dots	C_n	0	0	\dots	0	0
B.C.	B.V.	X_1	X_2	\dots	X_n	S_1	S_2	\dots	S_m	R.H.S.
0	S_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}	1	0	\dots	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}	0	1	\dots	0	b_2
$:$	$:$	$:$	$:$	\dots	$:$	$:$	$:$	\dots	$:$	$:$
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	\dots	a_{mn}	0	0	\dots	1	b_m
$Z_j - C_j$		$-C_1$	$-C_2$	\dots	$-C_n$	0	0	\dots	0	0

3- يتم إختيار حل أساسي مقبول جديد بحيث يحسن دالة الهدف بإدخال متغير غير أساسي تكون قيمته في صف $Z_j - C_j$ (معاملات دالة الهدف) الأكثر سالبة إذا كانت دالة الهدف من نوع max والقيمة الأكثر موجبة إذا كانت دالة الهدف من نوع min (شرط المثالية Optimality condition مع ضمان إن قيم العمود R.H.S. غير سالبة) .

أما المتغير الخارج Leaving Variable فيحدد بإعتباره النسبة الأقل من حاصل قسمة عمود R.H.S. على القيم الموجبة فقط المناظرة لها من عمود المتغير الداخل Entering Variable (شرط المقبولية Feasibility condition) ، وإن عنصر إلتقاء صف المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل يسمى بعنصر المحور Pivot element .

4- يحذف المتغير الداخل من جميع المعادلات في الجدول بإستثناء المعادلة المرتبطة بالمتغير الخارج ، إذ يقسم صف المتغير الخارج على عنصر المحور ويستبدل بالمتغير الداخل . ولحذف المتغير الداخل من بقية المعادلات تجرى التحويلات الصفية بضرب صف المتغير الداخل الجديد

في العنصر المقابل لعنصر المحور بعكس الإشارة لكل صف من صفوف المتغيرات الأساسية وتجمع مع عناصر الصفوف القديمة لكل متغير أساسي للحصول على الصفوف الجديدة لهم .

5- نستمر بتكرار الخطوات السابقة حتى تصبح جميع قيم صف $Z_j - C_j$ غير سالبة إذا كانت دالة الهدف من نوع $max.$ ، أو غير موجبة إذا كانت الدالة من نوع $min.$ ، أي نتوقف عندما لا يمكن تحسين قيمة دالة الهدف وبذلك نكون قد حصلنا على الحل الأمثل للمسألة .

مثال-6 : حل مثال-3 باستخدام الطريقة المبسطة *Simplex method* .

الحل :

$$\begin{aligned} \max. \quad & Z = 120X + 100Y \\ \text{s.t.} \quad & 2X + 2.5Y + S_1 = 1000 \\ & 3X + 1.5Y + S_2 = 1200 \\ & 1.5X + 4Y + S_3 = 1200 \\ & X, Y, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{aligned}$$

		120	100	0	0	0	0	
B.C.	B.V.	X	Y	S_1	S_2	S_3	R.H.S.	Ratio
0	S_1	2	2.5	1	0	0	1000	500
$\leftarrow 0$	S_2	3	1.5	0	1	0	1200	$400 \rightarrow min.$
0	S_3	1.5	4	0	0	1	1200	800
$Z_j - C_j$		$-120 \uparrow$	-100	0	0	0	0	—
$\leftarrow 0$	S_1	0	1.5	1	$-2/3$	0	200	$133.3 \rightarrow min.$
120	X	1	0.5	0	$1/3$	0	400	800
0	S_3	0	3.25	0	-0.5	1	600	184.6
$Z_j - C_j$		0	$-40 \uparrow$	0	40	0	48000	—
100	Y	0	1	$2/3$	$-4/9$	0	$400/3$	
120	X	1	0	$-1/3$	$5/9$	0	$1000/3$	
0	S_3	0	0	$-13/6$	$17/18$	1	$500/3$	
$Z_j - C_j$		0	0	$80/3$	$200/9$	0	$160000/3$	

بما إن جميع قيم صف $Z_j - C_j$ غير سالبة ودالة الهدف من نوع $max.$ لذا فالحل أمثل ، وعليه فإن $X = 1000/3$ و $Y = 400/3$ وإن قيمة دالة الهدف $Z = 160000/3$ ، وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في حل المثال-3 .

أما العمليات الحسابية التي أجريت على التكرار الأول في الجدول أعلاه ، فهي :

لكون -120 القيمة الأكثر سالبية في صف $Z_j - C_j$ لذا فالمتغير الداخل هو X ولكون أقل نسبة 400 لذا فالمتغير الخارج هو S_2 ، وللحصول على صف X الجديد نقسم صف S_2 القديم على 3 .
واللحصول على صفي S_1 و S_3 الجديدين نتبع العمليات التالية :

صف X الجديد -2^*	-2	-1	0	$-2/3$	0	-800
صف S_1 القديم	2	2.5	1	0	0	1000
بالجمع						
صف S_1 الجديد	0	1.5	1	$-2/3$	0	200
صف X الجديد -1.5^*	-1.5	-0.75	0	-0.5	0	-600
صف S_3 القديم	1.5	4	0	0	1	1200
بالجمع						
صف S_3 الجديد	0	3.25	0	-0.5	1	600

ملاحظة : أما إذا ظهر على الأقل قيد واحد من نوع أكبر أو يساوي (\geq) أو مساواة ($=$) ، فلا يمكن تطبيق الطريقة المبسطة ، لذا يمكن إتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

1- طريقة M - (M - technique) : وقد تسمى أيضاً طريقة الجزاء $Penalty method$ ،

وكما ذكرنا سابقاً فإن هذه الطريقة تستخدم عندما لا تكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي (\leq) بشرط $b_i \geq 0$ ، أما الخطوات الأساسية لهذه الطريقة تكون :
أ- يكتب النموذج بالصيغة القياسية .

ب- تضاف المتغيرات الإصطناعية (R_i) $Artificial variables$ إلى القيود من نوع أكبر من أو يساوي (\geq) أو مساواة ($=$) ويجب أن تكون قيم هذه المتغيرات في الحل النهائي (الأمثل) مساوية للصفر . بمعنى آخر:

- إذا كان القيد من نوع أصغر من أو يساوي (\leq) يضاف المتغير الراكد S_i .

- إذا كان القيد من نوع أكبر من أو يساوي (\geq) يطرح المتغير S_i و يضاف المتغير R_i .

- إذا كان القيد من المساواة ($=$) يضاف المتغير R_i .

أما معاملات المتغيرات الإصطناعية R_i في دالة الهدف هي ($-M$) في حالة max و ($+M$) في حالة min ، وباعتبار إن قيمة M كبيرة جداً . أما معاملات المتغيرات الراكدة S_i فمعاملاتها في دالة الهدف تبقى صفر .

ج- تستخدم المتغيرات الإصطناعية R_i كمغيرات أساسية للقيود المتواجدة فيها في الحل الابتدائي الأساسي المقبول (S.B.F.S.) .

د- الإستمرار بالحل كما في الطريقة المبسطة مع الأخذ بنظر الإعتبار إن قيمة M كبيرة جداً وأكبر من القيم المتواجدة في الجدول عند تحديد المتغيرات الداخلة .

مثال-7 : حل النموذج الرياضي الآتي :

$$\begin{aligned} \min. \quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 \geq 15 \\ & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 \leq 20 \\ & X_1 + X_2 + X_3 = 5 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \min. \quad & Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3 + MR_1 + MR_2 \\ \text{s.t.} \quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\ & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\ & X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\ & X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

		5	-6	-7	0	0	M	M		
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S.	Ratio
←M	R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	15	3min.
0	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20	—
M	R_2	1	1	1	0	0	0	1	5	5
$Z_j - C_j$		2M-5	6M+6↑	-2M+7	-M	0	0	0	20M	—
-6	X_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	—
0	S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	5.9
←M	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	-1/5	1	2	1.25min
$Z_j - C_j$		4/5M-31/5	0	8/5M+53/5↑	1/5M+6/5	0	-6/5M-6/5	0	2M-18	—
-6	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
0	S_2	3	0	0	-2	1	2	-4	30	
-7	X_3	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
$Z_j - C_j$		-23/2	0	0	-1/8	0	-M+1/8	-M-53/8	-125/4	

لكون جميع قيم المعاملات في دالة الهدف (الصف $Z_j - C_j$) غير موجبة ، لذا فالحل أمثل وعليه فإن $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3=5/4$ وإن قيمة دالة الهدف في نهايتها الصغرى $Z = -125/4$.

2- طريقة المرحلتين Two- Phase technique : تستخدم هذه الطريقة أيضاً عندما لا تكون جميع القيود من نوع أصغر من أو يساوي (\leq) . تعتمد خطوات حل هذه الطريقة على مرحلتين ، وكما يلي :

أ- المرحلة الأولى Phase - I : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وكما وضحت في الطريقة السابقة .
2. تلغى دالة الهدف الأصلية ويحل محلها دالة الهدف : $\min. R = \sum R_i$ باعتبار إن R_i هي المتغيرات الإصطناعية الموجودة في القيود ، أما القيود السابقة فتبقى كما هي .
3. تحل المسألة بالطريقة المبسطة ويتم التوقف عندما تكون قيمة $R=0$ وتصبح المتغيرات الإصطناعية R_i متغيرات غير أساسية ، أي إن قيمها في الجدول الأخير تساوي صفر . وبخلافه (أي إن $R \neq 0$) يعنى لا يوجد حل أمثل للمسألة .

ب- المرحلة الثانية Phase-II : تتضمن الخطوات التالية :

1. تحذف أعمدة R_i من الجدول الأمثل السابق وبإحلال معاملات دالة الهدف الأصلية محل معاملات دالة الهدف للجدول الأخير .
2. تحل المسألة بالطريقة المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل .

مثال-8 : حل نموذج المثال-7 بطريقة المرحلتين

Phase - I :

$$\begin{aligned}
 \min. \quad & R = R_1 + R_2 \\
 \text{s.t.} \quad & X_1 + 5X_2 - 3X_3 - S_1 + R_1 = 15 \\
 & 5X_1 - 6X_2 + 10X_3 + S_2 = 20 \\
 & X_1 + X_2 + X_3 + R_2 = 5 \\
 & X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

B.C.	B.V.	0	0	0	0	0	1	1	R.H.S.	Ratio
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2		
$\leftarrow 1$	R_1	1	5	-3	-1	0	1	0	15	$3 \rightarrow \min.$
0	S_2	5	-6	10	0	1	0	0	20	—
1	R_2	1	1	1	0	0	0	1	5	5
$R_j - C_j$		2	$6 \uparrow$	-2	-1	0	0	0	20	—
0	X_2	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	—
0	S_2	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	5.9
$\leftarrow 1$	R_3	4/5	0	8/5	1/5	0	-1/5	1	2	$1.25 \rightarrow \min$
$R_j - C_j$		4/5	0	$8/5 \uparrow$	1/5	0	-6/5	0	2	—
0	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
0	S_2	3	0	0	-2	1	2	-4	30	
0	X_3	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
$R_j - C_j$		0	0	0	0	0	-1	-1	0	

بما إن قيم R_1 و R_2 صفرية (أي إنها متغيرات غير أساسية) وإن قيمة $R=0$ لذا
ننتقل إلى المرحلة الثانية بحذف عمودي R_1 و R_2 وإرجاع معاملات دالة الهدف الأصلية :

Phase-II :

B.C.	B.V.	5	-6	-7	0	0	R.H.S.
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
-6	X_2	1/2	1	0	-1/8	0	15/4
0	S_2	3	0	0	-2	1	30
-7	X_3	1/2	0	1	1/8	0	5/4
$Z_j - C_j$		-23/2	0	0	-1/8	0	-125/4

لكون جميع معاملات دالة الهدف غير موجبة ودالة الهدف من نوع $\min.$ ، لذا فالحل أمثل
وعليه فإن : $X_1=0$ و $X_2=15/4$ و $X_3=5/4$ وإن قيمة دالة الهدف في نهايتها
الصغرى $Z = -125/4$ وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في المثال السابق .

تمارين الفصل الرابع

1- حول النماذج التالية إلى الصيغتين القانونية والقياسية :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \max. \quad Z = X_1 - 3X_2 \\ & s.t. \quad -X_1 + 2X_2 \leq 5 \\ & \quad \quad X_1 + 3X_2 = 10 \\ & \quad \quad X_1, X_2 \text{ unrestricted in sign} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \min. \quad Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \\ & s.t. \quad X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 40 \\ & \quad \quad X_1 + 9X_2 - 7X_3 \geq 50 \\ & \quad \quad 2X_1 + 3X_2 = 20 \\ & \quad \quad |5X_2 + 8X_3| \leq 100 \\ & \quad \quad X_1, X_2 \geq 0, \quad X_3 \text{ unrest.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \min. \quad Z = -3X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 5X_4 \\ & s.t. \quad 4X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ & \quad \quad X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 \leq 14 \\ & \quad \quad 2X_1 + 3X_2 - X_3 + 2X_4 \geq 2 \\ & \quad \quad X_1, X_2 \geq 0, \quad X_3 \leq 0, \quad X_4 \text{ unrest.} \end{aligned}$$

2- مصنع ينتج أربعة منتجات A, B, C, D باستخدام ماكنتين M_1, M_2 ، الزمن المستغرق وكلفة إنتاج وحدة واحدة على كل من الماكنتين والوقت المتاح للإشتغال لكل ماكينة وسعر البيع للوحدة الواحدة لكل منتج موضحة في الجدول أدناه :

machines	Time per unit (hours/unit)				Cost (I.D./hour)	Availability hours
	A	B	C	D		
M_1	2	3	4	2	10	500
M_2	3	2	1	2	15	380
Sales price (I.D./unit)	65	70	55	45	—	—

علماً إن الكلفة الكلية لإنتاج وحدة واحدة تعتمد مباشرة على زمن إشتغال الماكينة . المطلوب صياغة نموذج رياضي للبرمجة الخطية للمسألة أعلاه لتحقيق :

(أ) أقل كلفة إجمالية. و (ب) أعلى صافي ربح كلي .

3- صناعي يشغل أربعة مكائن لإنتاج نوعين من المنتجات ، الطاقة الإنتاجية للمكائن (وحدة/يوم) وكلف إشتغالهم موضحة في الجدول أدناه :

<i>machines</i>	<i>Products</i>		<i>Operation Cost (I.D./day)</i>
	<i>I</i>	<i>II</i>	
<i>I</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>2000</i>
<i>II</i>	<i>6</i>	<i>3</i>	<i>2200</i>
<i>III</i>	<i>2</i>	<i>7</i>	<i>1800</i>
<i>IV</i>	<i>8</i>	<i>4</i>	<i>1600</i>

قرر الصناعي إن إنتاجه من المنتج الأول لا يقل عن 60 وحدة / إسبوع ، ولا يزيد إنتاجه من المنتج الثاني عن 75 وحدة / إسبوع . أكتب النموذج الرياضي للبرمجة الخطية لتحديد عدد أيام الإشتغال لكل ماكينة خلال الإسبوع لتقليل إجمالي الكلف .

4- شركة تنتج نوعين من القبعات ، كل قبعة من النوع الأول تحتاج إلى ضعف الزمن المستغرق لإنتاج قبعة من النوع الثاني ، فإذا إقتصر الإنتاج على النوع الثاني فقط فللشركة إمكانية إنتاج 500 قبعة من هذا النوع . كما وإن دراسات السوق أشارت إلى إمكانية بيع 150 قبعة من النوع الأول و 250 قبعة من النوع الثاني . وإن الأرباح لكل قبعة من النوع الأول هي 8000 دينار و 5000 دينار من النوع الثاني . حدد عدد القبعات الممكن إنتاجها لكلا النوعين لتعظيم الأرباح .
(ans.: 125 , 250 , 2250000)

5- تقوم شركة بإنتاج أربعة أنواع من المكائن *A , B , C , D* تحتاج هذه الشركة إلى نوعين من المواد الأولية وإلى ساعات عمل معينة لإنتاج هذه المكائن وكما مبينة في الجدول أدناه :

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>Raw material-I</i>	<i>8</i>	<i>14</i>	<i>10</i>	<i>6</i>
<i>Raw material-II</i>	<i>2</i>	<i>4</i>	<i>7</i>	<i>6</i>
<i>Labor time (hours)</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>1</i>

يتوفر لدى الشركة 800 طن من المواد الأولية *RM-I* و 400 طن من المواد الأولية *RM-II* و 150 ساعة عمل / إسبوع . أما كلفة الطن الواحد من المواد الأولية 2000 و 4000 دينار على التوالي وكلفة ساعة العمل الواحدة فهي 1000 دينار وتباع المكائن الأربعة في الأسواق على التوالي 40000 و 60000 و 63000 و 45000 دينار / ماكينة . أوجد عدد المكائن الممكن إنتاجها من كل نوع لتعظيم الربح .
(ans.: 65 , 20 , 0 , 0 , 1210000)

6- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية :

1) $\max. Z = 4X + 3Y$

$s.t. 2X + 3Y \leq 6$

$-3X + 2Y \leq 3$

$2Y \leq 5$

$2X + Y \leq 4$

$X, Y \geq 0$

2) $\max. Z = 3X + 2Y$

$s.t. |Y - X| \leq 2$

$X + Y \geq 1$

$X \leq 4$

$Y \leq 3$

$X, Y \geq 0$

3) $\min. Z = 8X + 5Y$

$s.t. X + 2Y \leq 10$

$X \geq 5$

$Y \leq 2$

$X, Y \geq 0$

4) $\min. Z = 2X + 3Y$

$s.t. X + Y \leq 15$

$X + 2Y \geq 10$

$X, Y \geq 0$

(ans.: (X,Y,Z): 1)(3/2,1,9), 2)(4,3,18), 3) (5,0,40), 4) (0,5,15))

7- حل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية الآتية :

1) $\max. Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 5X_4$

$s.t. X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \leq 46$

$3X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 8$

$2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 \leq 10$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

2) $\min. Z = X_1 - 3X_2 - 2X_3$

$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$

$-2X_1 + 4X_2 \leq 12$

$-4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

(ans.: 1) (0,12/7,0,34/7; 26) , 2) (78/25,114/25,11/10; -319/25))

8- حل النموذج الرياضي للبرمجة الخطية الآتي بإعتبار إن المتغيرات X_6, X_5, X_4 متغيرات أساسية

في الحل الابتدائي الأساسي المقبول (S.B.F.S.) :

$\max. Z = 3X_1 + X_2 + 2X_3$

$s.t. 4X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 3$

$8X_1 + X_2 - 4X_3 + 2X_5 = 10$

$3X_1 - X_6 = 0$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

(ans.: (0,0,3/2,0,7/2,0;3))

9- حل نموذجي البرمجة الخطية التاليين :

1) $\min. Z = 4X_1 + X_2$

$s.t. 3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

2) $\max. Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3$

$s.t. X_1 + 2X_2 + X_3 = 3$

$2X_1 - X_2 = 4$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

بإعتبار X_3 متغير أساسي في الجدول الأولي. (ans.: 1) (3/5,6/5;18/5) , 2) (2,0,1;5))