الفصل الخامس

نموذجي النقل والتخصيص

5-1- نموذج النقل *Transportation Model* :

يعتبر نموذج النقل من أهم نماذج البرمجة الخطية في المنشآت الصناعية ، إذ يعتبر مكملاً للعملية الإنتاجية بهدف إمدادها لما تحتاج إليه من مستلزمات الإنتاج في الوقت والمكان المحددين .

يبحث هذا النموذج نقل سلعة ما من عدد من المصادر المتمثلة بمراكز عرض (مراكز تجهيز المواد الأولية للمنشآت) إلى مواقع مختلفة المتمثلة بمراكز الطلب (المنشآت الصناعية) بأقل التكاليف أو أقل زمن ممكن شرط أن يكون التجهيز عند كل مصدر والطلب عند كل موقع وكلفة نقل الوحدة الواحدة (أو الزمن المستغرق لنقل الوحدات) من كل مصدر إلى كل موقع معلومة ومحددة .

تعود الجذور التأريخية لنموذج النقل إلى عام *1941* عندما قدم هيتشكوك دراسته بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى مواقع مختلفة " وفي عام *1947* قدم كوبمانس دراسته بعنوان " الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل " التي طورت من قبل دانتزك عام *1963* ، وفي عام *1951* درس دانتزك وأخرون طريقة التوزيع المعدل *Modify Distribution method (MODI)* للحصول على الحل الأمثل أما طريقة المسار المتعرج *Stepping Stone* فقد أقترحت من قبل شارنس و كوبر في عام *1954* . وفي عام *1955* توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام *Assignment problem* وهي حالة خاصة من مشكلة النقل وطورها كلٍ من فورد وفولكرسن في عام *1957* ، أما طريقة تقريب فوجل *V.A.M.* فقد أقترحت من قبل فوجل عام *1958* ، وطريقة *R.A.M.* فقد أقترحت من قبل روسيل في عام *1968* .

5-1-2- مشكلة النقل بأقل كلفة *The least cost transportation problem* :

بإفتراض وجود m من المصادر و n من المواقع وإن :

S_i تمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر i .

D_j تمثل عدد الوحدات المطلوبة عند الموقع j .

C_{ij} تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عند المسار (i, j) الذي يربط المصدر i بالموقع j .

X_{ij} تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j .

لذا فالهدف الرئيسي هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j بحيث تكون كلفة النقل الإجمالية أقل ما يمكن .

وبإفتراض إن الكلف خطية ، فنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يكون :

$$\begin{aligned} min. \quad & Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij} \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n}X_{ij}=a_i \\ & \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=b_j \\ & X_{ij}\geq 0 \end{aligned}$$

في بعض الأحيان ، قد يكون مجموع العرض عند المصادر ومجموع الطلب عند المواقع غير متساويين . ففي هذه الحالة فالنموذج يكون غير متزن *unbalanced* ، ولتحقيق الإتزان نتبع :

1- إذا كان الطلب أكبر من العرض نضيف مصدر وهمي بحيث يجهز كمية النقص البالغة $\sum_j b_j-\sum_i a_i$.

2- إذا كان الطلب أصغر من العرض نضيف موقع وهمي لإمتصاص الكمية الفائضة والبالغة $\sum_i a_i-\sum_j b_j$.

وإن كلفة نقل الوحدة الواحدة من هذه المصادر او لهذه المواقع الوهمية تكون مساوية للصفر .

أما الخطوات الرئيسية المتبعة في حل نموذج النقل بأقل كلفة تكون :

1- نحدد الحل الإبتدائي الأساسي المقبول *S.B.F.S.* .

2- نحدد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية ، فإذا كانت كل المتغيرات تحقق شرط المثالية نتوقف ، وبعكسه نذهب للخطوة التالية .

3- نحدد المتغير الخارج (بإستخدام شرط المقبولية) من بين متغيرات الحل الأساسي الحالي ثم نجد الحل الأساسي الجديد ونعود للخطوة السابقة .

5-1-2- <u>طرق إيجاد الحل الإبتدائي الأساسي المقبول *S.B.F.S.*</u>: التي تعطينا حلاً يمكن الإنطلاق منه للوصول إلى الحل الأمثل ، وهي :

1- <u>طريقة الركن الشمالي الغربي *Northwest corner method*</u> : تعتبرهذه الطريقة ابسط الطرق إذ تبدأ بتعيين أعلى كمية مسموح بها من بين العرض والطلب للمتغير X_{11} (في أقصى الركن الشمالي الغربي من الجدول) ، أي إن $X_{11}=min.(a_1 ,b_1)$ ثم نستبعد العمود (الصف) المتحقق ومن ثم نساوي المتغيرات المتبقية للعمود (للصف) المستبعد بالصفر ، بعد تعديل كميات العرض والطلب لكل الصفوف والأعمدة غير المستبعدة نعين الخلية المقبولة العظمى للعنصر الأول غير المستبعد في العمود (الصف) الجديد وتكتمل هذه العملية عندما يكون بالضبط صف واحد أو عمود واحد غير مستبعد .

2- <u>طريقة الأقل كلفة *Least cost method*</u> : تكون أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ التكاليف بنظر الإعتبار ، اما الإسلوب المتبع في هذه الطريقة هو ان تحدد الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة للوحدة الواحدة ونستبعد العمود (الصف) المتحقق بعدئذٍ نعدل العرض والطلب لكل العناصر

غير المستبعدة ونكرر العملية بتحديد الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة للوحـدة الواحـدة غيـر المستبعدة ونستمر بالحل حتى يتبقى لدينا صف (عمود) واحد غير مستبعد .

3- طريقة تقريب فوجل *Vogel's Approximation Method (V.A.M.)*: تكون هـذه الطريقـة أفضل من سابقتيها لأنها تعطينا حل أقرب للمثالية لكونها تاخذ كلف الجزاء بنظر الإعتبار ، وكمـا موضحة في الخطوات التالية :

أ- نقدر كلفة الجزاء لكل عمود ولكل صف بطرح قيمة أقل كلفتين متتاليتين من نفس الصـف أو العمود .

ب- نحدد الصف أو العمود الذي له أكبر كلفة جزاء ونخصص الكمية المتاحة للمتغير الأقل كلفة في الصف أو العمود المختار ثم نعدل العرض والطلب بعد حذف الصف (العمود) المتحقق.

ج- 1. إذا بقي لدينا صف (عمود) واحد فقط غيـر محـذوف نحـدد المتغيـرات الأساسـية فـي الصف(العمود) بطريقة الأقل كلفة .

2. إذا كانت كل الصفوف والأعمدة غير المحذوفة لها عرض وطلب صفر سـتحدد المتغيـرات الأساسية الصفرية بطريقة الأقل كلفة .

3. وبعكسه ، نعيد إحتساب كلفة الجزاء للصفوف والأعمدة غير المحذوفة ثم نعود للخطوة (ب) (مع ملاحظة إن الصفوف والأعمدة التي عرضها وطلبها صفر لاتحتسب كلف جزائهم) .

مع ملاحظة إنه إذا تساوت أكبر كلف الجزاء نختار من بينهم الصف (العمود) الذي فيه أقل كلفة نقل وإذا تساوت أقل كلف نقل أيضاً نختار من بينهم الصف (العمود) الذي ينقل أكبر كمية وإذا مـا تساوت أكبر كمية نقل نختار الصف (العمود) بشكل عشوائي.

4- طريقة روسيل التقريبية *Russel's Approximation Method (R.A.M.)* : تعتبر هـذه الطريقة أفضل من سابقاتها لأنها تعطينا حل إبتدائي أقرب للحل الأمثل (خصوصاً للمصفوفات الكبيرة) وخطواتها هي :

أ- تحديد أعلى كلفة نقل لكل صف (نرمز لها $\overline{a_i}$) ولكل عمود (نرمز لها $\overline{b_j}$) .

ب- نشكل مصفوفة جديدة كلفها هي : $\Delta_{ij} = C_{ij} - \overline{a_i} - \overline{b_j}$.

ج- نحدد الخلية التي لها أصغر كلفة نقل Δ_{ij} ، ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي $min.(a_i , b_j)$.

د- بحذف الصف (العمود) المتحقق وتغيير كمية تجهيز الصف أو طلب العمود الذي تقـع فيه الخلية إلى مقدار الفرق بين كميتي التجهيز والطلب المقابلة لهما .

هـ- 1. إذا بقي صف (عمود) واحد نعطي الصف (العمـود) المتبقـي كميـات الطلـب والتجهيز المتبقية .

2. إذا بقي أكثر من صف (عمود) واحد نعود للخطوة (أ) .

<u>ملاحظـــة عامة</u> : لكل الطرق السابقة إذا تحقق عمود وصف معاً نحذف أحدهما فقط ونصفر الآخـــر ، وهذا يضمن تعيين قيم صفرية للمتغيرات الأساسية .

5-1-3- <u>طرق الوصول للحل الأمثل *Optimal Solution*</u> :

تستخدم لإختبار ولتحسين الحل الأولي *S.B.F.S.* وصولاً للحل الأمثل ،بعد تحقق الشرط الأساســـي : عدد الخلايا الأساسية يساوي *m+n-1* بإعتبار *n* تمثل عدد الأعمدة و *m* عدد الصفوف .

ومن هذه الطرق :

1- <u>طريقة المسار المتعرج *Stepping Stone method*</u> : لتحديد المتغيرات الداخلة والخارجـــة ، نحدد حلقة مغلقة لكل متغير غير أساسي تبدأ وتنتهي الحلقة عنده. تتكـــون هـــذه الحلقـــة مـــن مستقيمات أفقية وعمودية متتابعة على شكل أجزاء نهاية تقاطعها يجب أن تكون متغيرات أساسية بإستثناء البداية والنهاية تكون عند متغير غير أساسي ، أي إن عنصر كل ركن من أركان الحلقة يجب أن يكون مربع يحتوي على متغير أساسي ، لايختلف الحل فيما إذا كان مسار الحلقة بإتجاه عقرب الساعة أم بعكسه ، ومن الملاحظ إنه في الحل الأساسي فلكل متغير غير أساســـي حلقـــة وحيدة .

تستخدم هذه الحلقات للتاكد فيما إذا كانت قيمة دالة الهدف ستتحسن عندما تزداد قيمة المتغيـــر غير الأساسي أكثر من قيمته الصفرية الحالية بمقدار وحدة واحدة وللحفاظ على الحـــل المقبـــول نطرح ونضيف لعناصر اركان الحلقة بالتناوب وحدة واحدة بحيث نحافظ على تحقق قيود العرض والطلب وعندئذٍ نحسب صافي الزيادة او النقصان في الكلفة $\overline{C}_{ij}$ نتيجة زيادة وحدة واحـــدة مـــن كمية هذا المتغير غير الأساسي . فإذا كانت $\overline{C}_{ij}$ موجبة فهذا يعني إنها ستزيد من كلفة النقل وإذا كانت سالبة فمعنى ذلك إنها ستخفض كلفة النقل ، وفي هذه الحالة سنختار المتغير الداخل الذي له اكبرقيمة سالبة (شرط المثالية في الطريقة المبسطة) . أما المتغير الخارج فنختاره مـــن بـــين متغيرات أركان الحلقة التي ستأخذ الإشارة السالبة (المتغيرات التي تتناقص نتيجة زيادة المتغير غير الأساسي) والذي له أقل قيمة لأن قيمته ستصل الصفر وأي تناقص آخر سيؤدي بـــه إلـــى السالب (شرط المقبولية في الطريقة المبسطة) ، ثم نعطي قيمة المتغير الخارج للمتغير الـــداخل ونحتسب الكلفة الأخيرة ونعيد الكرة مرة أخرى حتى نحصل على الحل الأمثل .

2- <u>طريقة المضاعفات *Multipliers method*</u> : وتسمى هذه الطريقة بطريقـــة التوزيـــع المعـــدل *Modified Distribution method (MODI)* وخطوات هذه الطريقة هي نفســـها خطـــوات الطريقة السابقة لكن الإختلاف الرئيسي بينهما يتعلق بالطريقة التي تقدر خلايا المتغير الأساسي . وتستند هذه الطريقة على النظرية البديلة *Duality theory* .

يشترك مع كل صف i في جدول النقل المضاعف U_i ومع كل عمود j المضاعف V_j وتكتـــب المعادلة لكل متغير أساسي X_{ij} في الحل الحالي :

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

فيتشكل لنا $(m+n-1)$ من المعادلات (لوجود $(m+n-1)$ من المتغيرات الأساسية) لها $(m+n)$ من المجاهيل ، ويمكننا تقدير قيم المضاعفات من هذه المعادلات بإفتراض قيمة عشـوائية لأحـد المضاعفات (عادةً نفترض $U_1=0$) ومن ثم نحل المعادلات التي سيكون عددها مسـاوي لعـدد مجاهيلها وبعدئذٍ نقدر الكلفة الجديدة $\overline{C}_{pq}$ لكل متغير غير أساسي X_{pq} فيكون :

$$\overline{C}_{pq} = C_{pq} - (U_p+V_q)$$

فهذه القيم هي نفس القيم التي حصلنا عليها من الطريقة السابقة بغـض النظـر عـن الإختيـار العشوائي لأحد المضاعفات . لذا نختار المتغير الداخل بحيث يكون أكبر قيمة سـالبة إلـى $\overline{C}_{pq}$ (شرط المثالية في الطريقة المبسطة) وبإستخدام الحلقة المغلقة للمتغير الداخل كما وضحت سابقاً ونحدد المتغير الخارج الذي له أقل كلفة للخلايا التي تأخذ الإشارة السالبة فـي الحلقـة (شـرط المقبولية في الطريقة المبسطة) .

<u>مثال–1</u> : الخزانات الثلاثة S_3 , S_2, S_1 يمكنها ضخ 15 ، 20 و 25 مليون لتر ماء صافي يومياً تمد الأربعة مدن C_4 , C_3 , C_2 , C_1 وإحتياجاتها 8 ، 10 ، 12 و 15 مليون لتر ماء صافي يوميـاً . المطلوب التوصل إلى ترتيب نقل الماء الصافي بين الخزانات الثلاثة والمدن الأربعة بأقل التكـاليف الكلية للنقل (بفرض إن تخزين الماء الفائض عن الحاجة لايسبب أية كلفة) إستناداً لكلـف النقـل (لكل مليون لتر)المبينة في الجدول أدناه :

	C_1	C_2	C_3	C_4
S_1	2	3	4	5
S_2	3	2	5	2
S_3	4	1	2	3

<u>الحل</u> : بسبب عدم التوازن لأن مجموع كميات الضخ $(25+20+15=60)$ أكبر مـن مجمـوع كميـات الطلب $(8+10+12+15=45)$ ، لذا نضيف مدينة وهمية C_5 تكون كلف نقل الماء الصافي إليها مساوي للصفر وكمية تجهيزها $(60-45=15)$ مليون لتر ماء صافي .

1– إيجاد الحل الأولي .S.B.F.S – نستخدم <u>إحدى</u> الطرق الأربعة التالية :

أ– طريقة الركن الشمالي الغربي –

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 8	3 7	4	5	0	15
S_2	3	2 3	5 12	2 5	0	20
S_3	4	1	2	3 10	0 15	25
Demand	8	10	12	15	15	60

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل هي :

$$T.T.C. = 2*8 + 3*7 + 2*3 + 5*12 + 2*5 + 3*10 + 0*15 = 143$$

ب– بإستخدام طريقة الأقل كلفة :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل ستكون :

$$T.T.C. = 2*0 + 0*15 + 3*5 + 2*15 + 4*3 + 1*10 + 2*12 = 91$$

ج– بإستخدام طريقة فوجل *VAM* :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply	P.C.
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15	<u>2</u> 1 1 <u>3</u>
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20	2 0 0 1 1
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25	1 1 2 1 1
Demand	8	10	12	15	15	60	
P.C.	1 1 1 1 1	1 1 1	2 <u>2</u> <u>2</u>	1 1 1 1 1	0		

وعليه فإن الكلفة الإجمالية للنقل ستكون :

$$T.T.C. = 2*0 + 0*15 + 3*5 + 2*15 + 4*3 + 1*10 + 2*12 = 91$$

د- بإستخدام طريقة روسيل *RAM* :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 8	3	4	5	0 7	15
S_2	3	2	5	2 15	0 5	20
S_3	4	1 10	2 12	3	0 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

الجدول النهائي لهذه الطريقة أستخرج إستناداً للجداول أدناه :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	-7	-5	-6	-5	-5
S_2	-6	-6	-5	<u>-8</u>	-5
S_3	-4	-6	-7	-6	-4

تملأ الخلية X_{24} ويحذف الموقع C_4 :

	C_1	C_2	C_3	C_5
S_1	-6	-4	-5	-4
S_2	-6	-6	-5	-5
S_3	-4	-6	<u>-7</u>	-4

تملأ الخلية X_{33} ويحذف الموقع C_3 :

	C_1	C_2	C_5
S_1	-5	-3	-3
S_2	-4	-4	-3
S_3	-4	<u>-6</u>	-4

تملأ الخلية X_{32} ويحذف الموقع C_2 :

	C_1	C_5
S_1	-4	-2
S_2	-4	-3
S_3	-4	<u>-4</u>

تملأ الخلية X_{35} ويحذف المصدر S_3 :

	C_1	C_5
S_1	-3	-2
S_2	-3	<u>-3</u>

تملأ الخلية X_{25} ويحذف المصدر S_2 ، لذا تعطى القيم المتبقية للخليتين البــاقيتين X_{15} , X_{11} لبقاء صف واحد .

$$T.T.C. = 2*8 + 0*7 + 2*15 + 0*5 + 1*10 + 2*12 + 0*3 = 80$$

ومما تقدم اعلاه ، نلاحظ إن الكلفة الإجمالية للنقل بإستخدام الطرق الأربعة كانت مختلفة وكالآتي :

الركن الشمالي الغربي (143) > الأقل كلفة (91) ≤ فوجل *VAM* (91) > روسيل *RAM* (80) .

لذا فغالباً ما تكون طريقة روسيل *RAM* هي الأفضل وتليها طريقة فوجل *VAM* .

إستناداً للحل الأولي *S.B.F.S.* الذي حصلنا عليه بالطريقة الثالثة *VAM* (بالرغم من إنه من الأفضل إستخدام الطريقة الرابعة *RAM* لكونها أفضل الطرق ، ولكن بسبب إستعراض طرق الحل الأمثل تم إختيار هذه الطريقة) ولغرض الوصول للحل الأمثل لابد من إستخدام إحدى الطريقتين التاليتين لإختبار وتحسين الحل وبعد تحقق الشرط الأساسي :

No. of basic cells = m+n-1 = 5+3-1=7

2- إيجاد الحل الأمثل *Optimal solution* : نستخدم إحدى الطريقتين :

أ- طريقة المسار المتعرج *Stepping stone* : وكما تطرقنا سابقاً ، نجد المسارات المتعرجة لكل الخلايا غير الأساسية وكذلك صافي الزيادة في الكلفة $\bar{C}_{ij}$ لكل مسار .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 / 0	3	4	5	0 / 15	15
S_2	3 / 5	2	5	2 / 15	0	20
S_3	4 / 3	1 / 10	2 / 12	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \bar{C}_{12} = 3-1+4-2=4$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{11} \quad : \quad \bar{C}_{13} = 4-2+4-2=4$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{21} \to X_{11} \quad : \quad \bar{C}_{14} = 5-2+3-2=4$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \bar{C}_{22} = 2-1+4-3=2$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{21} \quad : \quad \bar{C}_{23} = 5-2+4-3=4$$
$$X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{21} \quad : \quad \bar{C}_{25} = 0-0+2-3=-1$$
$$X_{34} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{31} \quad : \quad \bar{C}_{34} = 3-2+3-4=0$$
$$X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \to X_{31} \quad : \quad \bar{C}_{35} = 0-0+2-4=-2 \; most \quad negative$$

لكون القيمة الأكثر سالبية هي $\overline{C}_{35}$ لذا فالمتغير الداخل ***entering variable*** هو المتغير X_{35} . أما المتغير الخارج ***leaving variable*** فيتحدد من المسار المتعرج للمتغير الداخل : $\overset{+}{X}_{35} \rightarrow \overset{-}{X}_{15} \rightarrow \overset{+}{X}_{11} \rightarrow \overset{-}{X}_{31}$ والذي له أقل كمية نقل X_{ij} من الخلايا الســالبة ، أي إن المتغير X_{31} سيكون هو المتغير الخارج ، لذا فالجدول الجديد سيكون كما يلي :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 3	3	4	5	0 12	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4	1 10	2 12	3	0 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 6 + 0 + 15 + 30 + 10 + 24 + 0 = 85

No. of basic cells = 5 + 3 – 1 = 7

$$X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3 - 1 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{14} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$$
$$X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2 - 1 + 0 - 0 + 2 - 3 = 0$$
$$X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{35} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{21} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5 - 2 + 0 - 0 + 2 - 3 = 2$$
$$X_{25} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{25} = 0 - 3 + 2 - 0 = -1 \quad \textit{negative}$$
$$X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{35} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4 - 2 + 0 - 0 = 2$$
$$X_{34} \rightarrow X_{24} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{15} \rightarrow X_{35} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3 - 2 + 3 - 2 + 0 - 0 = 2$$

لذا فالمتغير الداخل هو X_{25} والمتغير الخارج سيكون X_{21} ، وعليه فالجدول الجديد سيكون :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 8	3	4	5	0 7	15
S_2	3	2	5	2 15	0 5	20
S_3	4	1 10	2 12	3	0 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80

No. of basic cells = 7

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{12} = 3-1+0-0=2$$
$$X_{13} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{13} = 4-2+0-0=2$$
$$X_{14} \to X_{24} \to X_{25} \to X_{15} \quad : \quad \overline{C}_{14} = 5-2+0-0=3$$
$$X_{21} \to X_{25} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{21} = 3-0+0-2=1$$
$$X_{22} \to X_{32} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{22} = 2-1+0-0=1$$
$$X_{23} \to X_{33} \to X_{35} \to X_{25} \quad : \quad \overline{C}_{23} = 5-2+0-0=3$$
$$X_{31} \to X_{35} \to X_{15} \to X_{11} \quad : \quad \overline{C}_{31} = 4-0+0-2=2$$
$$X_{34} \to X_{35} \to X_{25} \to X_{24} \quad : \quad \overline{C}_{34} = 3-0+0-2=1$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\overline{C}_{ij}$ لذا فالحل أمثل وعليه فإنه :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى *8* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة *15* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير *10* و*12* مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

2- طريقة المضاعفات *Multipliers method* : وكما ذكرنا سابقاً ، نجد قيم V_j , U_i من العلاقة التالية : $U_i + V_j = C_{ij}$ للخلايا الأساسية ، وبإفتراض إن : $U_1=0$ ، وإستناداً للحل الأولي المستخرج بطريقة *VAM* فإن :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 0	3	4	5	0 15	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4 3	1 10	2 12	3	0	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 91 and no. of basic cells = 7

$$C_{11} = U_1 + V_1 = 2 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_1 = 2$$
$$C_{15} = U_1 + V_5 = 0 \overset{U_1=0}{\Rightarrow} V_5 = 0$$
$$C_{21} = U_2 + V_1 = 3 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_2 = 1$$
$$C_{24} = U_2 + V_4 = 2 \overset{U_2=1}{\Rightarrow} V_4 = 1$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 = 4 \overset{V_1=2}{\Rightarrow} U_3 = 2$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 = 1 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_2 = -1$$
$$C_{33} = U_3 + V_3 = 2 \overset{U_3=2}{\Rightarrow} V_3 = 0$$

أما الخلايا غير الأساسية فنجد لها $\overline{C}_{ij}$ من العلاقة $\overline{C}_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$ وكما يلي :

$$\overline{C}_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 + (-1)) = 4$$
$$\overline{C}_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 0) = 4$$
$$\overline{C}_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 5 - (0 + 1) = 4$$
$$\overline{C}_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 2 - (0 - 1) = 2$$
$$\overline{C}_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 5 - (1 + 0) = 4$$
$$\overline{C}_{25} = C_{25} - (U_2 + V_5) = 0 - (1 + 0) = -1$$
$$\overline{C}_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 3 - (2 + 1) = 0$$
$$\overline{C}_{35} = C_{35} - (U_3 + V_5) = 0 - (2 + 0) = -2 \; most \quad negative$$

وهي نفس القيم المستخرجة في الطريقة السابقة . فالمتغير الداخل سيكون المتغير الأكثر سالبية لقيم $\overline{C}_{ij}$ وهو المتغير X_{35} ، أما المتغير الخارج فيتحدد بنفس الإسلوب السابق من خلال المسار المتعرج للمتغير الداخل $\overset{+}{X}_{35} \to \overset{-}{X}_{15} \to \overset{+}{X}_{11} \to \overset{-}{X}_{31}$ والخلية التي لها أقل كمية نقل من الخلايا السالبة ستحدد كمتغير خارج أي المتغير X_{31} ، أما الجدول الجديد سيكون :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
S_1	2 3	3	4	5	0 12	15
S_2	3 5	2	5	2 15	0	20
S_3	4	1 10	2 12	3	0 3	25
Demand	8	10	12	15	15	60

T.T.C. = 6 + 0 + 15 + 30 + 10 + 24 + 0 = 85

No. of basic cells = m + n – 1 = 3 + 5 – 1 = 7

يمكن إجراء العمليات الحسابية لإستخراج قيم $\overline{C}_{ij}$ بشكل مباشر على الجدول وكما مثبتة في المربع السفلي لكل خلية غير أساسية في الجدول أدناه :

		$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=1$	$V_5=0$	
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Supply
$U_1=0$	S_1	2 3	3 2	4 2	5 4	0 12	15
$U_2=1$	S_2	3 5	2 0	5 2	2 15	0 -1	20
$U_3=0$	S_3	4 2	1 10	2 12	3 2	0 3	25
Demand		8	10	12	15	15	60

وعليه فالمتغير الداخل هو X_{25} بإعتبار له قيمة $\bar{C}_{ij}$ سالبة ، أما المتغير الخارج X_{21} فيتحدد من المسار المتعرج لهذا المتغير الداخل ، أما الجدول الجديد سيكون :

		$V_1=2$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=2$	$V_5=0$	*Supply*
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
$U_1=0$	S_1	2 / 8	3 / 2	4 / 2	5 / 3	0 / 7	15
$U_2=0$	S_2	3 / 1	2 / 1	5 / 3	2 / 15	0 / 5	20
$U_3=0$	S_3	4 / 2	1 / 10	2 / 12	3 / 1	0 / 3	25
Demand		8	10	12	15	15	60

$$T.T.C. = 16 + 0 + 30 + 0 + 10 + 24 + 0 = 80$$

لعدم وجود قيمة سالبة لقيم $\bar{C}_{ij}$ (المثبتة قيمها في المربع السفلي للخلايا غير الأساسية في الجدول أعلاه) ، لذا فالحل أمثل . وعليه فإن :

يجهز الخزان الأول المدينة الأولى *8* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثاني المدينة الرابعة *15* مليون لتر من الماء الصافي .

يجهز الخزان الثالث المدينتين الثانية والثالثة بالمقادير *10* و*12* مليون لتر من الماء الصافي على التوالي.

5-2- نموذج التخصيص ***Assignment model*** :

تعد حالة خاصة من حالات النقل وتتمثل بوجود *n* من الأعمال (المهام) *Jobs* يمكن تمثيل كلٍ منها بواسطة أي من ألإمكانيات المتاحة (المكائن *machines*) البالغ عددها *m* المختلفة فيما بينها في كلفة أو وقت أو ربح او كفاءة التمثيل لكل عمل او مهمة إذ يطلب إختيار أحد الإمكانيات المتاحة المناسبة لتنفيذ كل مهمة بأدنى كلفة أو وقت ممكن أو بأعلى ربح او كفاءة ممكنة وهكذا.

يوجد اكثر من طريقة لحل مشكلة التخصيص ولكننا سنركز على أهم هذه الطرق ألا وهي الطريقة الهنكارية ، وكخطوة أولى لهذه الطريقة يجب تحقيق توازن المصفوفة (عدد المهام = عدد الإمكانيات) أي إن $m = n$ وبخلافه نضيف $(m - n)$ من المهام الوهمية إذا كانت $(n<m)$ أو نضيف $(n-m)$ من الإمكانيات الوهمية إذا كانت $(n>m)$.أما الكلف أو الربح لهذه المهام أو الإمكانيات الوهمية فتكون أصفار .

أما الخوارزمية المتبعة في هذه الطريقة فهي :

أ- في حالة التصغير *minimized* : نتبع الخطوات التالية :

1. **نطرح اصغر قيمة في كل صف من قيم هذا الصف فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا الصف لأي من أعمدة المصفوفة .**
2. **نطرح أصغر قيمة في كل عمود من قيم هذا العمود فنحصل على مصفوفة الفرص الضائعة من تخصيص هذا العمود لأي من صفوف المصفوفة .**
3. **نغطي اصفار المصفوفة كافة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو العمودية أو كليهما، فإذا كان عدد تلك الخطوط مساوياً لعدد صفوف (أعمدة) المصفوفة فالتخصيص سيكون أمثل .**
4. **إذا كان عدد هذه الخطوط أقل من عدد الصفوف (الأعمدة) نختار أقل قيمة في المصفوفة من القيم غير المغطاة بالخطوط ويطرح من كل قيمة من القيم غير المغطاة ويضاف إلى كل قيمة تقع عند ملتقى الخطين الأفقي والعمودي ، أما بقية القيم (المغطاة ولاتمثل التقاطع) فتترك كما هي .**
5. **تعاد الخطوة (2) حتى يتحقق التوزيع الأمثل .**

ب- في حالة التعظيم *maximized* : يمكن تحويلها إلى حالة التصغير من خلال طرح كل قيمة من قيم المصفوفة من أكبرقيمة فيها ونستمر بالخوارزمية السابقة لإيجاد التخصيص الأمثل .

مثال-2 : المصفوفة التالية توضح كلف توزيع أربعة مهام على خمسة مكائن :

jobs	machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	10	11	4	2	8
J2	7	11	10	14	12
J3	5	6	9	12	14
J4	13	15	11	10	7

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل لتقليل الكلف .

الحل : لعدم توازن مصفوفة الكلف ولكون عدد المهام 4= < عدد المكائن = 5 ، لذا نضيف مهمة خامسة كلفها مساوية للصفر وعليه فالمصفوفة ستكون :

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	10	11	4	2	8
J2	7	11	10	14	12
J3	5	6	9	12	14
J4	13	15	11	10	7
J5	0	0	0	0	0

بطرح أقل كلفة في كل صف ⟶

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	8	9	2	0	6
J2	0	4	3	7	5
J3	0	1	4	7	9
J4	6	8	4	3	0
J5	0	0	0	0	0

بطرح أقل كلفة في كل عمود من قيم العمود نفسه تبقى المصفوفة كما هي .

إن أقل عدد للمستقيمات الأفقية والعمودية التي تغطي الأصفار = 4 < عدد الصفوف (الأعمدة) للمصفوفة = 5 . لذا نطرح أقل قيمة من القيم المغطاة (أي يطرح 1) من القيم غير المغطاة وتضاف إلى التقاطعات فقط . فتصبح المصفوفة :

	M1	M2	M3	M4	M5
J1	9	9	2	0	7
J2	0	3	2	6	5
J3	0	0	3	6	9
J4	6	7	3	2	0
J5	1	0	0	0	1

أقل عدد من المستقيمات = عدد الصفوف = 5

لذا فالحل أمثل وعليه فإن توزيع الأصفار يكون :

Jobs	Machines
J1	M4
J2	M1
J3	M1 , M2
J4	M5
J5	M2 , M3 , M4

بحذف الماكنة *1* من المهمة *3* لأنها أشغلت من قبل المهمة *2* وكذلك حذف الماكنتين *2* و *4* من المهمة *5* لأنها اشغلت من قبل المهمتين *3* و *1* على التوالي ، لذا فالتخصيص الأمثل للمهام سيكون :

تنجز المهمة *1* على الماكنة *4* وبكلفة *2*

تنجز المهمة *2* على الماكنة *1* وبكلفة *7*

تنجز المهمة *3* على الماكنة *2* وبكلفة *6*

تنجز المهمة *4* على الماكنة *5* وبكلفة *7* ← إجمالي الكلف *22* .

أي بأقل كلفة إجمالية هي *22* ، علماً بأن الماكنة *3* لاتعطى لها أي مهمة .

<u>مثال-3</u> : المصفوفة التالية تمثل ربح توزيع أربعة مهام على أربعة مكائن :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	10	3	2	4
J2	9	4	1	3
J3	8	5	1	5
J4	7	6	2	6

المطلوب : إيجاد التخصيص الأمثل للمهام على المكائن لتحقيق أعلى ربح ممكن .

<u>الحل</u> : بطرح جميع قيم المصفوفة من أكبر قيمة فيها (أي *10*) لتحويلها إلى حالة التصغير ، فتكون المصفوفة الجديدة :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	7	8	6
J2	1	6	9	7
J3	2	5	9	5
J4	3	4	8	4

بطرح أقل قيمةفي كل صف →

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	7	8	6
J2	0	5	8	6
J3	0	3	7	3
J4	0	1	5	1

بطرح أقل قيمة في كل عمود

→

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	6	3	5
J2	0	4	3	5
J3	0	2	2	2
J4	0	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات =*2* < عدد الصفوف (الأعمدة) =*4* ، لذا تطرح *2* من القيم المغطاة وتضاف إلى التقاطع وعليه فالمصفوفة الجديدة ستكون :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	4	1	3
J2	0	2	1	3
J3	0	0	0	0
J4	2	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات =*3* < عدد الصفوف (الأعمدة) = *4* ، لذا نطرح *1* من القيم غير المغطـــاة وتضاف لقيم التقاطع ، فتكون المصفوفة الجديدة :

Jobs	Machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	0	3	0	2
J2	0	1	0	2
J3	1	0	0	0
J4	3	0	0	0

أقل عدد من المستقيمات = عدد الصفوف (الأعمدة) = *4* ، لذا فالحل أمثل وعليه فالتخصيص الأمثـــل سيكون :

Jobs	Machines
J1	M1 , M3
J2	M1 , M3
J3	M2 , M3 , M4
J4	M2 , M3 , M4

Jobs	Mach.	profit		Jo.	Ma.	Pr.		Jo.	Ma.	Pr.		Jo.	Mach.	Pr.
J1	M1	10		J1	M1	10		J1	M3	2		J1	M3	2
J2	M3	1		J2	M3	1		J2	M1	9		J2	M1	9
J3	M2	5	or	J3	M4	5	or	J3	M2	5	or	J3	M4	5
J4	M4	6		J4	M2	6		J4	M4	6		J4	M2	6
$\sum$		22		$\sum$		22		$\sum$		22		$\sum$		22

أي وجود أربعة تخصيصات مثلى للمهام على المكائن لتحقيق أعلى ربح ممكن وقدره *22* وحدة نقدية وكما مثبتة أعلاه .

تمارين الفصل الخامس

1- أوجد الحل الأمثل لمسائل النقل التالية :

a)

Sources	Destinations D1	D2	D3	Supply
S1	1	2	6	7
S2	0	4	2	12
S3	3	1	5	11
Demand	10	10	10	30

b)

Sources	Destinations D1	D2	D3	Supply
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
Demand	9	10	11	30

c)

Sou.	Dest. D1	D2	D3	Sup.
S1	5	1	7	10
S2	6	4	6	80
S3	3	2	2	15
Dem.	75	20	50	

Sou.	Dest. D1	D2	D3	D4	Sup.
S1	10	20	5	7	10
S2	13	9	12	8	20
S3	4	15	7	9	30
S4	14	7	1	0	40
S5	3	12	5	19	50
Dem.	60	60	20	10	150

(ans. : a)(7,0,0,2,0,10,1,10,0;40) , b)(2,10,0,3,0,11,4,0,0;38) ,
c)(0,10,0,35,10,35,0,0,15,40,0,0;500) ,
d)(0,0,10,0,0,20,0,0,30,0,0,0,0,30,0,10,30,10,10,0;820))

2- تشحن سلع من أربعة مخازن *W1 , W2 , W3 , W4* إلى خمسة أسواق *M1 , M2 , M3 , M4 , M5* . العرض عند المخازن هو 70 ، 40 ، 60 و30 وحدة على التوالي . بينما الطلب عند الأسواق هو 40 ، 20 ، 30 ، 60 و50 وحدة على التوالي . أما كلف النقل بين المخازن والأسواق فهي :

Warehouses	Markets M1	M2	M3	M4	M5
W1	7	6	5	4	2
W2	9	7	3	6	3
W3	8	8	7	3	1
W4	4	3	1	2	1

أوجد الكمية المشحونة المثلى من المخازن إلى الأسواق بأقل كلفة إجمالية ممكنة .

(ans.: (30,0,0,40,0,0,0,30,0,10,0,0,0,20,40,10,20,0,0,0;690))

3- حل مسألة النقل التالية ، بحيث الطلب عند الموقع *D1* يجب أن يشحن من المصدر *S4* :

Sources	Destinations			Supply
	D1	D2	D3	
S1	5	1	0	20
S2	3	2	4	10
S3	7	5	2	15
S4	9	6	0	15
Demand	5	10	15	

(ans.: (0,10,5,5,5,0,0,0,10,0,0,0,15,5,0,10,0;55))

4- أربعة أصناف مختلفة من المكائن تتوزع على خمسة مهام ن عـــدد المكـــائن المتـــوفرة فـــي الأصناف الأربعة هي *25* ، *30* ، *20* و *30* ، وعدد الوظائف في المهام الخمسة هـــي *20* ، *20* ، *30* ، *10* و*25* . أوجد التخصيص الأمثل للمكائن على المهام بحيث إن صنف الماكنة الرابعـــة *M4* لايأخذ المهمة الرابعة *J4* . علماً إن الكلف لكل وحدة موضحة في الجدول التالي :

machines	Jobs				
	J1	J2	J3	J4	J5
M1	10	2	3	15	9
M2	5	10	15	2	4
M3	15	5	14	7	15
M4	20	15	13	----	8

(ans.:(0,0,25,0,0,20,0,0,10,0,0,20,0,0,0,0,0,5,0,25;560))

5- أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع المهام على المكائن لمصفوفتي الكلف التاليتين :

a)

Jobs	machines			
	M1	M2	M3	M4
J1	10	5	5	2
J2	9	8	4	3
J3	7	7	6	4
J4	8	7	5	5

b)

Jobs	Machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	3	8	2	10	3
J2	8	7	2	9	7
J3	6	4	2	7	5
J4	8	4	2	3	5
J5	9	10	6	9	10

(*ans.:a) 1-2,2-4,3-1,4-3 or 1-4,2-3,3-1,4-2;20, b) 1-5 , 2-3 , 3-2 , 4-4 , 5-1 ;21*)

6- أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع المهام على المكائن لمصفوفة الربح التالية :

Jobs	Machines				
	M1	M2	M3	M4	M5
J1	3	9	2	3	7
J2	6	1	5	6	6
J3	9	4	7	10	3
J4	2	5	4	2	1
J5	9	6	2	4	6

(ans.:1-2 , 2-5 , 3-4 , 4-3 , 5-1 ;38)

7- أوجد التخصيص الأمثل لتوزيع أربعة عمليات على أربعة مكائن ، إذا كانت العملية ***P1*** لاتأخذ الماكنة ***M3*** ، والعملية ***P3*** لاتأخذ الماكنة ***M4*** ، علماً إن مصفوفة الكلف هي :

Processes	machines			
	M1	M2	M3	M4
P1	5	5	---	2
P2	7	4	2	3
P3	9	3	5	---
P4	7	2	6	7

(ans.: 1-4 , 2-3 , 3-2 , 4-1 ; 14)

8- لتوزيع أربعة مهندسين على أربعة خطوط إنتاجية ، علماً بأن مصفوفة كلف التوزيع كانت :

Engineering	Lines			
	L1	L2	L3	L4
E1	8	9	6	4
E2	5	7	7	8
E3	10	11	6	8
E4	3	9	5	7

المطلوب:

أ- أوجد التخصيص الأمثل للتوزيع .

ب- إذا تدخل مدير المصنع وقرر منع إستلام المهندس الأول ***E1*** للخط الإنتاجي الرابع ***L4***. ما هي الكلفة الإضافية التي يتحملها المصنع نتيجة هذا القرار .

(ans.: a)1-4 , 2-2 , 3-3 , 4-1;20 , b)1-3 , 2-2 , 3-4 , 4-1 ; 24 ; 4)

الفصل السادس

المخططات الشبكية *Network planning*

6−1 المسار الحرج *Critical Path* :

تستخدم هذه المخططات بشكل واسع للسيطرة على مراحل إقامة المشاريع وتنفيذها وكذلك في مراحل تصنيع أو تجميع السلع ويجري ذلك من خلال تحليل وتنسيق النشاطات والفعاليات الضرورية للإنتاج على هيئة شبكات أعمال مترابطة وجداول لأجل توجيه تنفيذ هذه الأعمال .

وبشكل عام فإن عناصر رسم وتكوين المخططات الشبكية وإعداد الجداول الزمنية للمتابعة وفرض الرقابة هي :

- **الحدث *Event* : ويشار إليه بدائرة يرقم كلٍ منها برقم خاص لا يجوز تكراره ويدل على ترتيب الحدث فقط ولكل شبكة حدث بداية واحد وحدث نهاية واحد ولا يحتاج الحدث إلى وقت او موارد لتنفيذه.**
- **النشاط *Activity* : ويشار إليه بسهم واحد ولا يجوز أيضاً تمثيل أي نشاط بأكثر من سهم ، وإن أي نشاط يحتاج لوقت وموارد لأجل تنفيذه ويوضع الوقت اللازم لإنجاز النشاط *Duration* عادةً فوق كل سهم ، مع ملاحظة إنه لا توجد علاقة بين طول السهم والفترة اللازمة لتنفيذه . يكون لكل نشاط حدث بداية وحدث نهاية ويمكن أن يشترك نشاطان في نفس حدث البداية ولكن حدث النهاية يكون مختلف لكلٍ منهما ، أو يمكن ان يشترك نشاطان في نفس حدث النهاية ولكن حدث البداية يكون مختلف لكلٍ منهما ، ولايجوز أن يشترك نشاطان في نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية .**
- **المسار *Path* : ويمثل سلسلة من الأسهم المتعاقبة تبدأ بحدث البداية وتنتهي بحدث النهاية ويميز كل مسار عادةً بأرقام الأحداث التي يمر بها ، والمسار الذي يستغرقه أطول الأزمنة يدعى بالمسار الحرج *Critical Path (C.P.)* وتتميز أنشطة هذا المسار بكونها أنشطة حرجة إذ إن أي تأخير يحصل إثناء تنفيذ أي من أنشطته يؤدي إلى تأخير تنفيذ العمل وعليه فإن وقت المسار الحرج يحدد المدة اللازمة لإتمام العمل .**

لحساب زمن المسار الحرج *C.P.time* يكون ضمن مرحلتين :

المرحلة الأولى – وتسمى العبور الأمامي *Forward pass* حيث تبدأ الحسابات من نقطة البداية بإتجاه نقطة البداية بإتجاه نقطة النهاية وعند كل نقطة يحسب الوقت المبكر *Earliest time* (ES_j) من العلاقة :

$$ES_j = \max_i .\{ES_j + D_{ij}\} \quad \forall (i,j) activities$$

بإعتبار إن $ES_1 = 0$ و D_{ij} يمثل الزمن اللازم لإنجاز النشاط (i,j) .

وتوضع القيمة في الشكل المربع .

المرحلة الثانية – وتسمى العبور الخلفي ***Backward pass*** إذ تبدأ الحسابات من نقطة النهاية بإتجاه نقطة البداية وعند كل نقطة يحسب الوقت المتأخر ***Latest time*** (LC_i) من العلاقة :

$$LC_i = \min_j .\{LC_i - D_{ij}\} \quad \forall (i,j) activities$$

بإعتبار إن $LC_n = ES_n$ ، وتوضع القيمة في الشكل المثلث .

وكل نشاط (i, j) يقع على المسار الحرج يجب أن يحقق :

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}$$

الوقت الفائض (الراكد) ***Free Float Time (F.F.)*** يمثل الفائض الزمني المتوفر للتوصل إلى حدث معين ويحسب من العلاقة :

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

<u>مثال–1</u> : إرسم المخططات الشبكية للمشاريع التالية :

a)

Act.	Pre-act.
A	----
B	----
C	A,B
D	A
E	C,D

b)

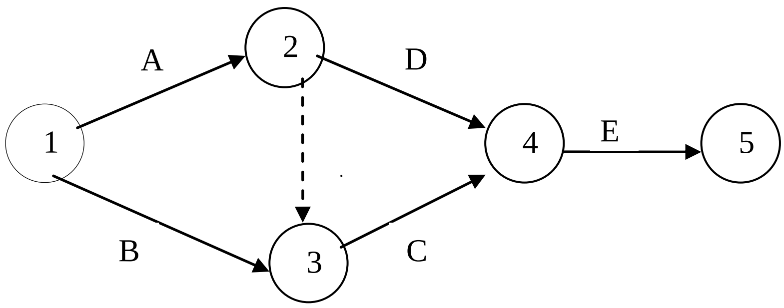
Act.	Pre-act.
A	----
B	A
C	A
D	B
E	B,C
F	D,E

c)

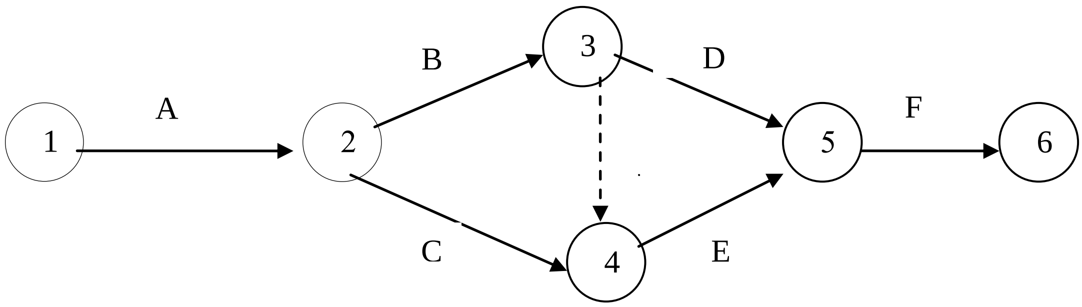
Act.	Pre-act.
A	----
B	----
C	A,B
D	A,B
E	B
F	D,E
G	C,F
H	D,E
I	G,H

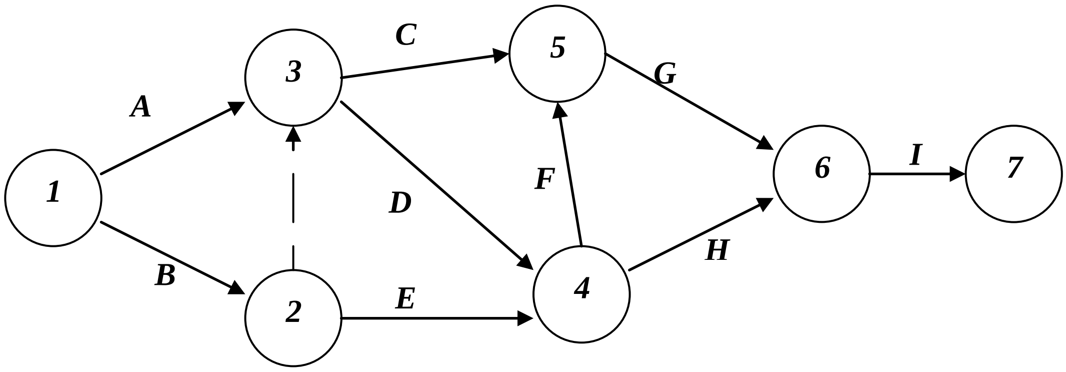
<u>الحل</u> :

a)



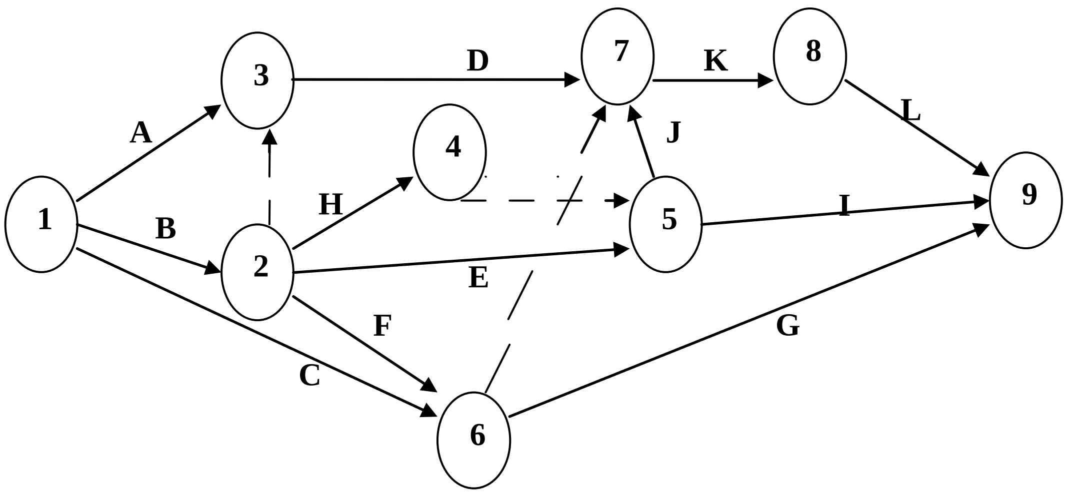
b)





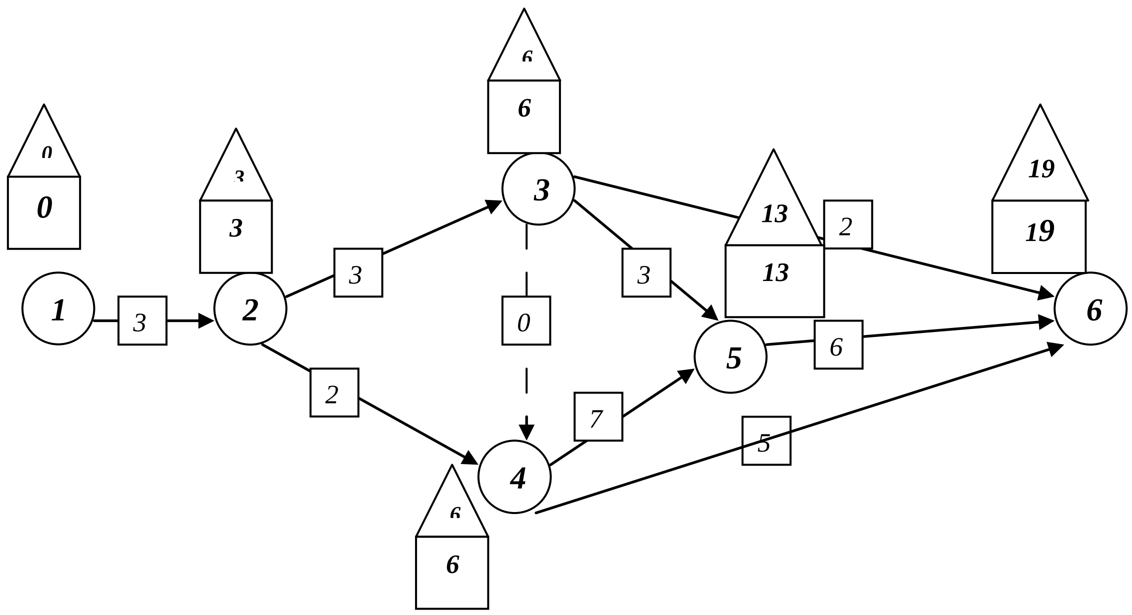
<u>مثال-2</u> : إرسم المخطط الشبكي للمشروع التالي :

- الأنشطة *C , B , A* هي أنشطة بدائية للمشروع وتبدأ بشكل آني .
- النشاطان *B , A* يسبقان النشاط *D* .
- النشاط *B* يسبق الأنشطة *H , F , E* .
- النشاطان *F , C* يسبقان النشاط *G* .
- النشاطان *H , E* يسبقان النشاطان *J , I* .
- الأنشطة *J , F , D , C* تسبق النشاط *K* .
- النشاط *K* يسبق النشاط *L* .
- الأنشطة *L , I , G* أنشطة نهائية للمشروع .



<u>مثال-3</u>- الجدول الآتي يمثل متطلبات تصنيع سلعة معينة بتسعة أنشطة ، أوجد المسار الحرج لتصنيع هذه السلعة :

activity	*1-2*	*2-3*	*2-4*	*3-4*	*3-5*	*3-6*	*4-5*	*4-6*	*5-6*
D_{ij}	*3*	*3*	*2*	*0*	*3*	*2*	*7*	*5*	*6*



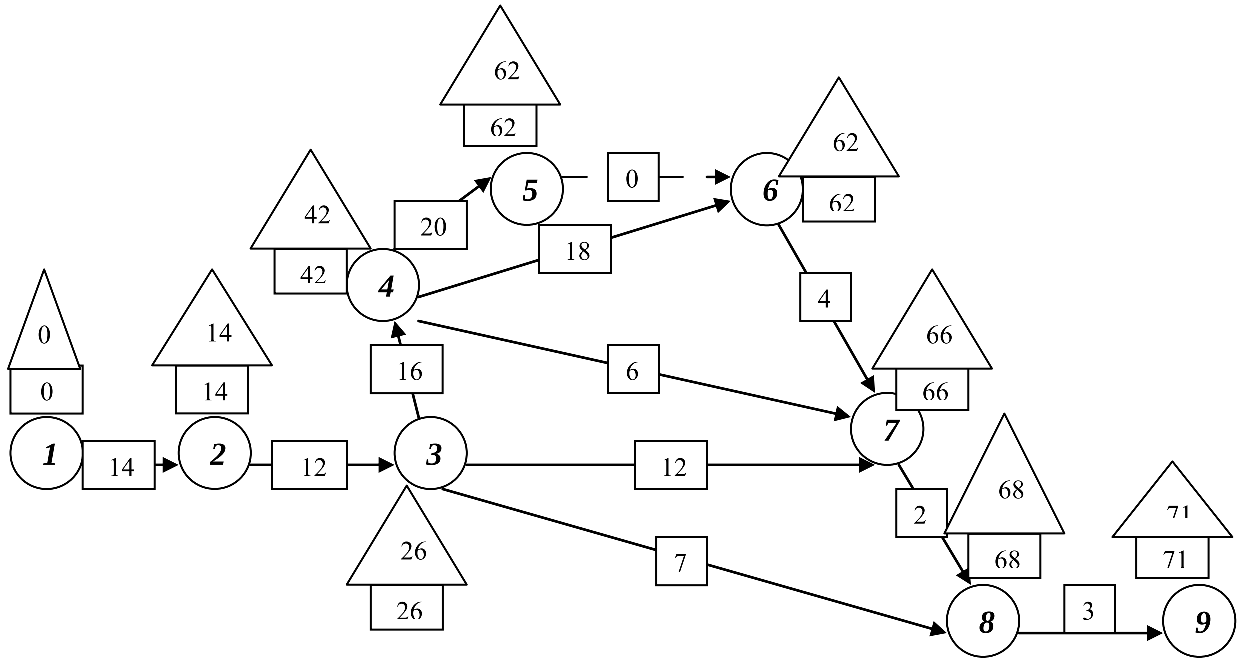
Forward pass	Backward pass
$ES_1 = 0$	$LC_6 = 19$
$ES_2 = 0 + 3 = 3$	$LC_5 = 19 – 6 = 13$
$ES_3 = 3 + 3 = 6$	$LC_4 = min. \{ 13-7, 19-5 \} = 6$
$ES_4 = max. \{ 3+2,6+0 \} = 6$	$LC_3 = min. \{ 6-0, 13-3, 19-2 \} = 6$
$ES_5 = max. \{ 6+3, 6+7 \} = 13$	$LC_2 = min. \{ 6-3, 6-2 \} = 3$
$ES_6 = max. \{ 6+2, 6+5, 13+6 \}= 19$	$LC_1 = 3 – 3 = 0$

لذا فالمسار الحرج لتصنيع السلعة هو : *1-2-3-4-5-6* بالأنشطة الحرجة :

(1,2) , (2,3) , (3,4) , (4,5) , (5,6) والزمن الحرج *Critical time* هو *19* .

<u>مثال–4</u> : أوجد المسار الحرج للمشروع التالي :

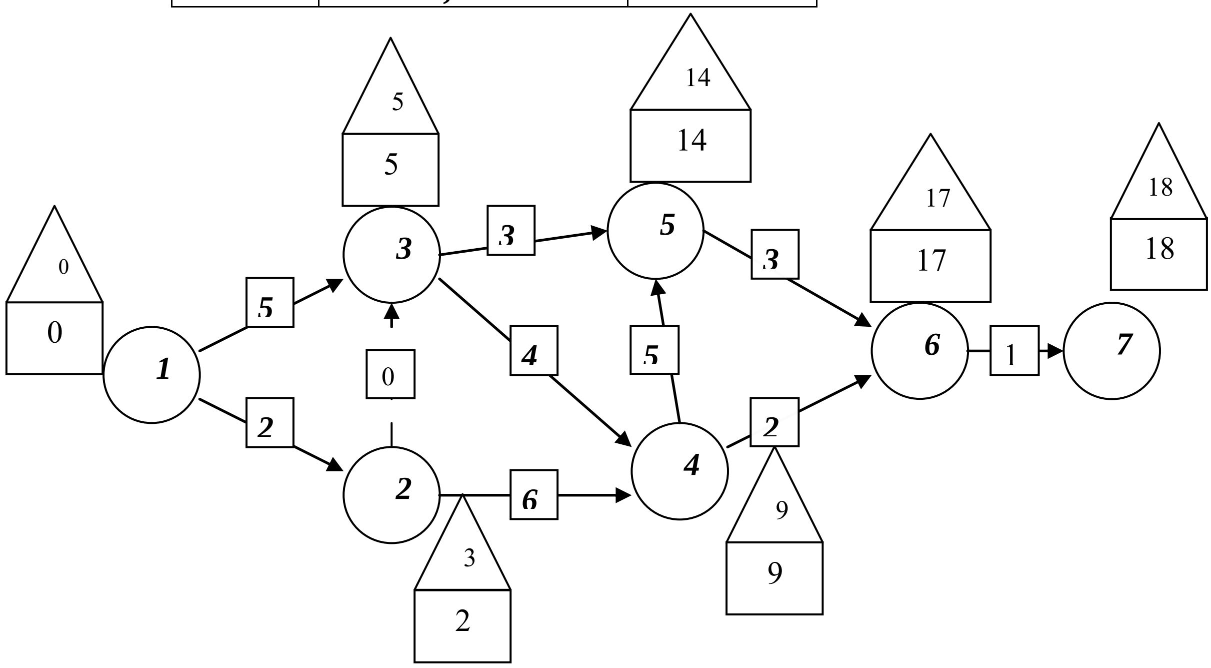
activity	Preceding activity	Duration
A	---	14
B	A	12
C	B	16
D	B	7
E	B	12
F	C	20
G	C	18
H	C	6
I	F , G	4
J	E , H , I	2
K	D , J	3



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ ، والزمن الحرج هو 71 .

<u>مثال-5</u> : أوجد المسار الحرج للمشروع التالي :

activity	***Preceding activity***	***Duration***
A	---	***5***
B	---	***2***
C	***A , B***	***3***
D	***A , B***	***4***
E	***B***	***6***
F	***D , E***	***5***
G	***C , F***	***3***
H	***D , E***	***2***
I	***G , H***	***1***



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : I , G , F , D , A والزمن الحرج $C.T.= 18$.

6−2− إسـلوب تقيـيم ومراجعـة البـرامج Program Evaluation and Review Technique (PERT) :

يعتبر إسلوب *PERT* من الأساليب الإدارية الحديثة للسيطرة على مراحل التصنيع ويستمد أهميتـه في الحياة العملية لكونه يشخص الأنشطة الحرجة التي يستدعي بالضرورة الإهتمام بها وملاحظتها أكثر من غيرها والعناية بتوفير كافة المستلزمات والإحتياجات الضرورية لأجل تنفيذها في الوقـت المحـدد. إضافةً لذلك فإن حساب الزمن الفائض بين الأنشطة يساعد على توجيه ونقل الموارد المالية والبشـرية الفائضة من بين الأنشطة غير الحرجة إلى الأنشطة الحرجة ، وفي هذه الحالة تتهيء افضـل الطـرق لتقليص الوقت وتخفيض تكاليف العمل . في هذا الإسلوب تدرس ثلاثة أنواع من الأزمنة وهي :

- الزمن المتفائل *Optimistic time (a)* والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل جيد جداً .
- الزمن المتشائم *Pestimistic time (b)* والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل رديء جداً .
- الزمن المحتمل *Most likely time (m)* والذي يعتبر إن التنفيذ سيتم بشكل طبيعي .

أما الوقت المتوقع $(\bar{D})$ *Expected time* للنشاط (i , j) فيحسب من العلاقة :

$$\bar{D} = \frac{a + b + 4m}{6}$$

أما التباين *Variance (V)* لكل نشاط فيحسب من العلاقة :

$$V = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

وبالتالي فإن إحتمال تنفيذ المشروع في الوقت المحدد سيكون :

$$Pr\left(Z \leq \frac{ST_i - CT_i}{\sqrt{V(\mu_i)}} \right)$$

إذ إن ST_i يمثل الوقت المحدد لإنجاز المشروع .

CT_i يمثل الزمن الحرج للمشروع .

$V(\mu)$ يمثل مجموع تباين الأنشطة الحرجة للمشروع .

ويمكن إيجاد قيمة الإحتمال اعلاه من جدول التوزيع الطبيعي .

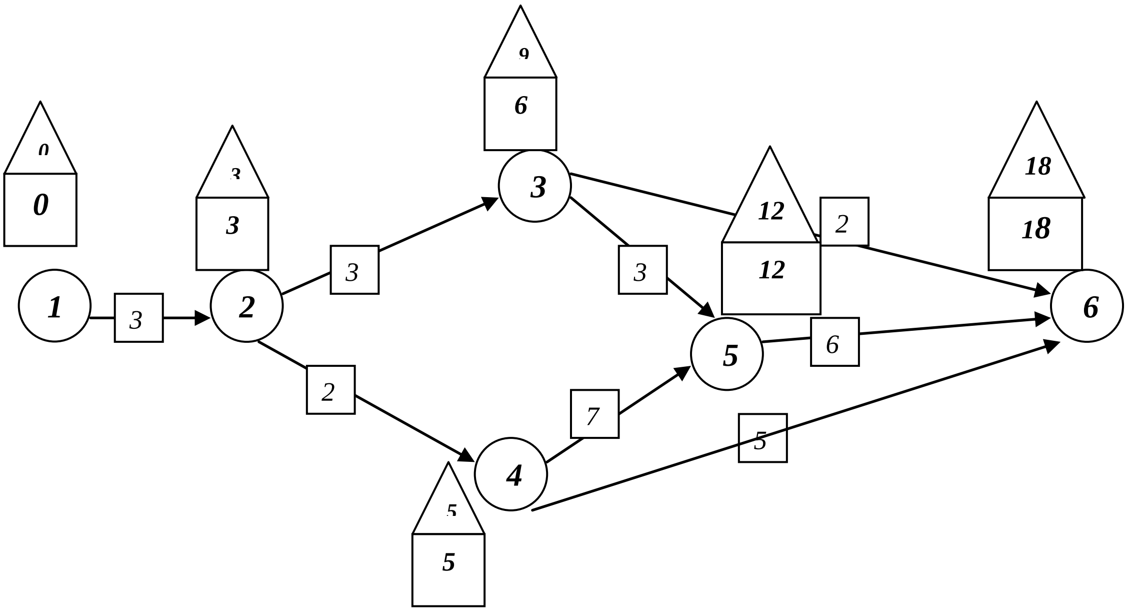
مع ملاحظة إن الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

<u>مثال−6</u> : البيانات التالية توضح أزمنة تنفيذ كل نشاط من أنشطة إحدى المشاريع الصناعية.المطلوب : حساب إحتمال تنفيذ المشروع خلال *20* شهراً .

activity	a	b	m
1,2	2	8	2
2,3	1	11	1.5
2,4	0.5	7.5	1
3,5	1	7	2.5
3,6	1	3	2
4,5	6	8	7
4,6	3	11	4
5,6	4	8	6

الحل :

activity	$\overline{D}$	V
1,2	3	1
2,3	3	---
2,4	2	1.36
3,5	3	----
3,6	2	----
4,5	7	0.11
4,6	5	----
5,6	6	0.44
	$V(\mu)$	2.91



لذا فالمسار الحرج يتمثل بالأنشطة : (1,2) , (2,4) , (4,5) , (5,6) وإن الزمن الحرج : CT =18.

$$Pr\left(Z_i \leq \frac{20-18}{\sqrt{2.91}}\right) = Pr(Z \leq 1.17) = 0.879$$

أي إن إحتمال إنجاز المشروع في مدة 20 شهراً هو 88% تقريباً .

6-3- تعجيل وتبطيء المخططات الشبكية :

يتضمن هذا الإسلوب كلفة تنفيذ المشروع ونوعان من التنفيذ :

1- النوع الأول- التنفيذ الطبيعي (الإعتيادي) ***Normal*** ويتضمن الزمن D_n والكلفة C_n .

2- النوع الثاني- التنفيذ التقليصي (التعجيلي) ***Crash*** ويتضمن الزمن D_c والكلفة C_c .

أما خوارزمية الحل ستكون كالآتي :

1- إيجاد المسار الحرج للزمن الطبيعي ومن ثم إيجاد الزمن الحرج لتنفيذ المشروع (***CTN***) .

2- إيجاد المسار الحرج للزمن التقليصي ومن ثم إيجاد الزمن الحرج لتنفيذ المشروع في حالة التقليص (***CTC***) .

3- إيجاد الزمن المسموح بتخفيضه $T = CTN - CTC$.

4- إيجاد الميل ***Slope*** لكل نشاط من العلاقة :

$$Slope = \frac{C_c - C_n}{D_n - D_c}$$

5- إيجاد الوقت الفائض ***Free Float (FF)*** للنشاطات غير الحرجة للأزمنة الطبيعية من العلاقة:

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - D_{ij}$$

والوقت الممكن تقليصه هو القيمة الأقل بين :

أ- أعلى ***FF*** لأنشطة كل مسارغير حرج .

ب- الفرق بين الزمن الطبيعي D_n والزمن التقليصي D_c للنشاط الحرج الذي له أقل ميل .

6- إيجاد الكلفة الكلية لتنفيذ المشروع بعد تقليص زمن تنفيذ المشروع من العلاقة :

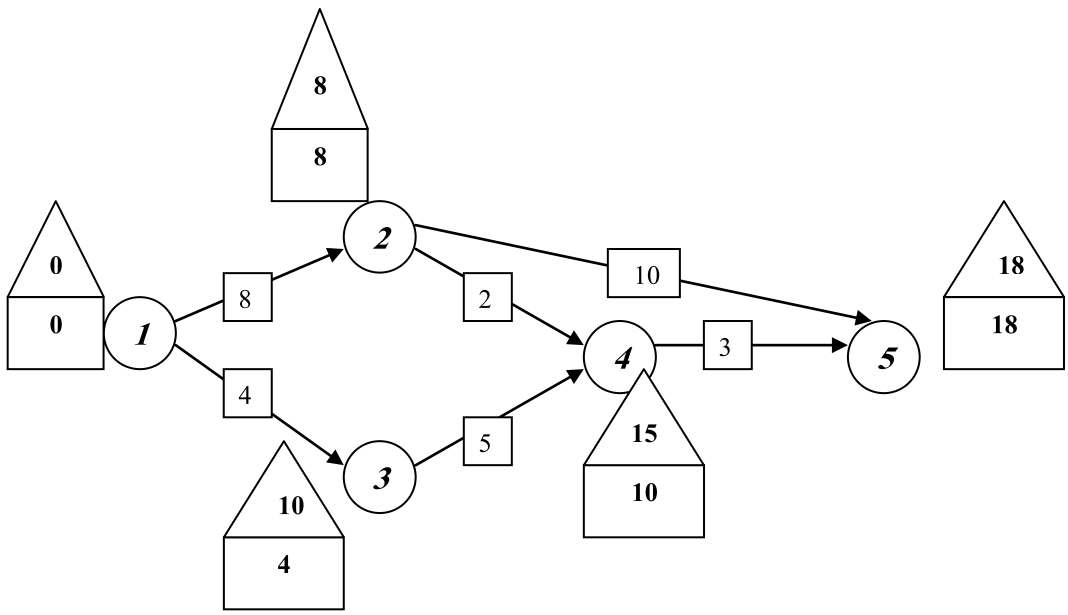
الكلفة الكلية للتنفيذ بعد التقليص = الكلفة الكلية السابقة + عدد الوحدات الزمنية المقلصة × ميل النشاط المقلص

7- إيجاد الزمن الحرج للمشروع بعد التقليص الأخير ، فإذا كان مساوياً للزمن الحرج لتنفيذ المشروع (***CTC***) (المستخرج في الخطوة 2) نتوقف وبخلافه نكرر الخطوتين 5 و 6 مرة أخرى .

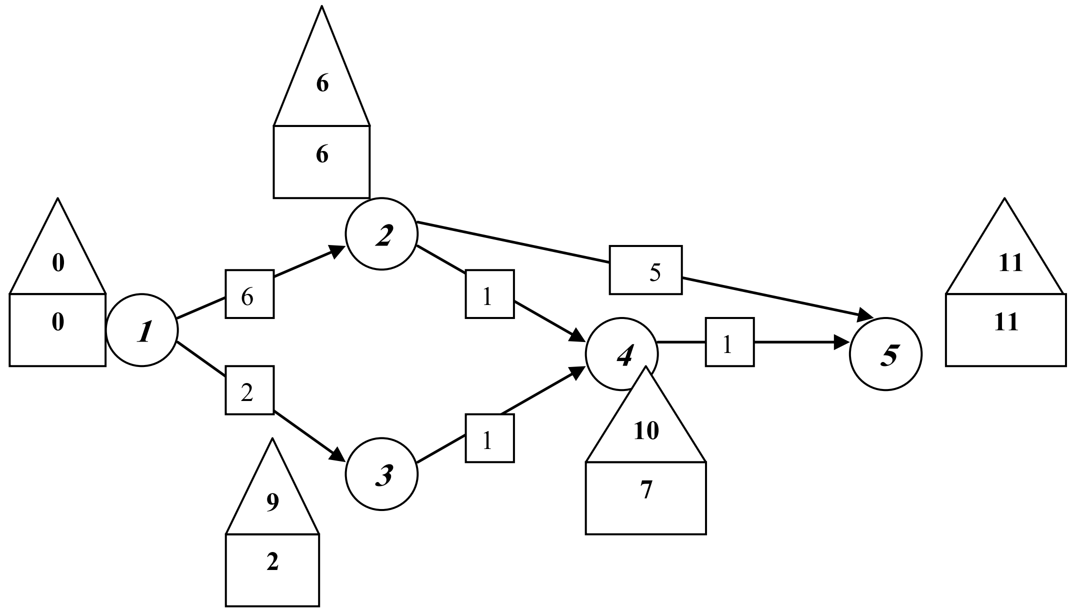
مثال-7 : البيانات المبينة أدناه تمثل زمن (شهر) وكلفة (ألف دينار) لتنفيذ كل نشاط من نشاطات إحدى المشاريع الصناعية في الحالتين الطبيعية والمقلصة . المطلوب تنفيذ المشروع بأقل وقت وكلفة ممكنتين :

activity	*normal*		*Crash*	
	D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	*8*	*100*	*6*	*200*
1 , 3	*4*	*150*	*2*	*350*
2 , 4	*2*	*50*	*1*	*90*
2 , 5	*10*	*100*	*5*	*400*
3 , 4	*5*	*100*	*1*	*200*
4 , 5	*3*	*80*	*1*	*100*
$\sum$	---	*580*	---	*1340*

الحل :



CTN = 18 , Total Cost = 580 **الزمن الطبيعي**



CTC = 11 , Total Cost = 1340 **الزمن التقليصي**

CTN – CTC = 18 – 11 = 7

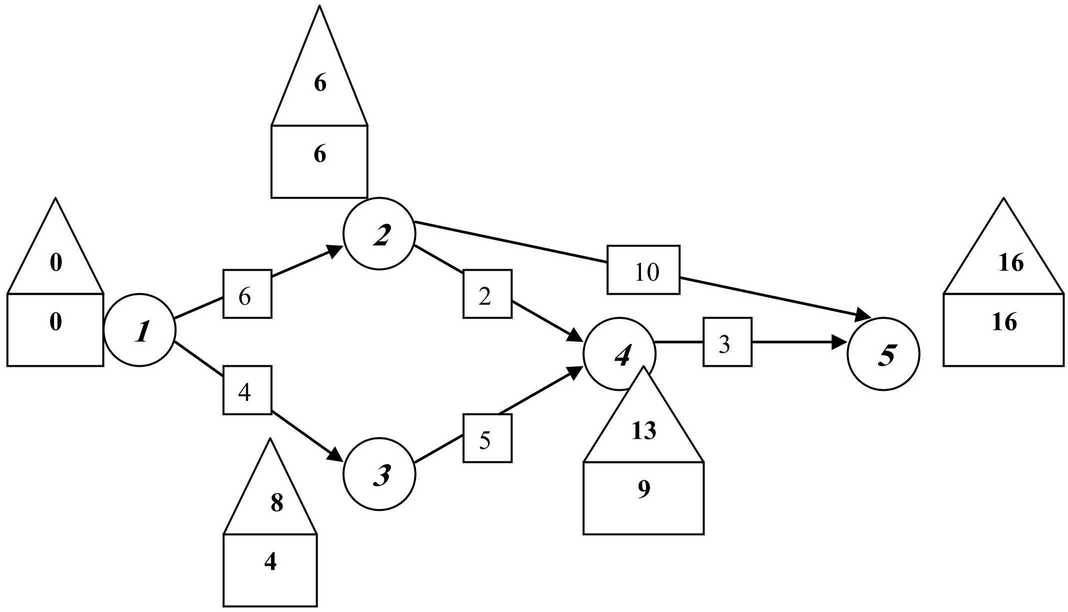
أي إنه يمكن تقليص تنفيذ المشروع بمقدار 7 أشهر .

أما الميل لكل نشاط والوقت الفائض للأنشطة غير الحرجة هي :

activity	***slope***	***F.F.***
1 , 2	***50 ****	***--------***
1 , 3	***100***	***4 – 0 – 4 = 0***
2 , 4	***40***	***10 – 8 – 2 = 0***
2 , 5	***60 ****	***--------***
3 , 4	***25***	***10 – 4 – 5 = 1***
4 , 5	***10***	***18 – 10 – 5 = 5 max.***

أما الزمن الممكن تقليصه من النشاط *(1,2)* (النشاط الحرج الذي له أقل ميــل)هو: *min. { 5, 8-6} =2*

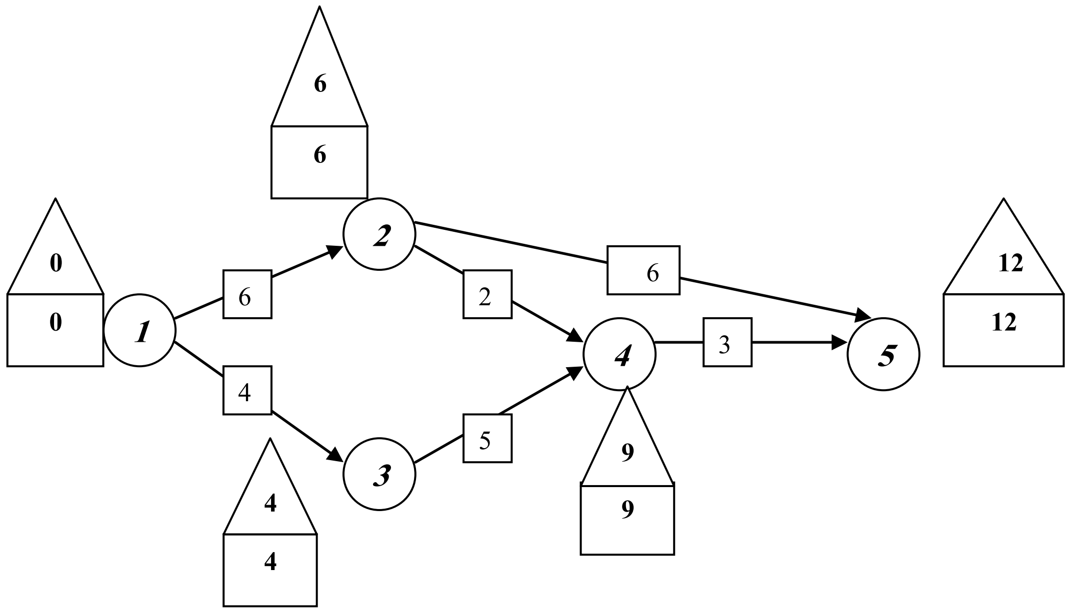
لذا فالمسار الحرج الطبيعي بعد تقليص زمن النشاط *(1,2)* شهرين سيكون :



Critical Path C.P. is : (1 , 2) , (2 , 5) and Total Cost T.C.= 580+ 2 * 50= 680

إن الوقت الحرج يمكن تقليصه مرة أخرى ، لذا سيقلص النشاط *(2,5)* إلى *min.{ 4 , 10-5 } = 4*

أي أربعة أشهر أخرى وسيكون المسار الجديد :



C.P. is : (1,2) , (2,5) and (1,3) , (3,4) , (4,5)

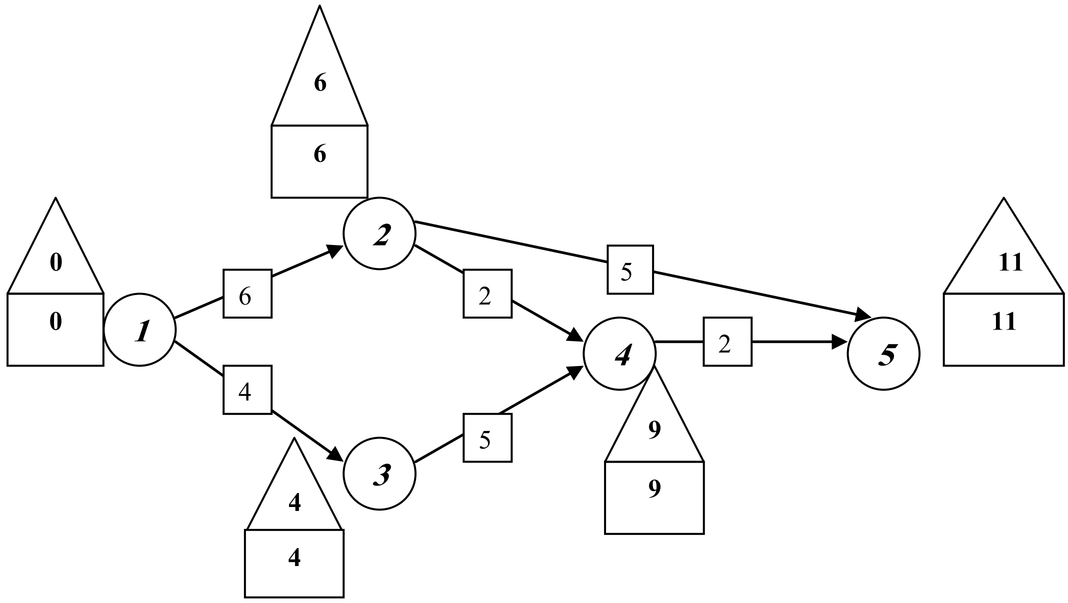
T.C. = 680 + 4 * 60 = 920

بالإمكان تقليص الزمن الكلي للإنجاز شهر واحد فقط ، إذ يمكن تقليص زمن إنجاز النشاط *(2,5)* إلى *5* أشهر ولكن هذا يؤدي إلى إن المسار الحرج سيتغير ما لم نغير من أنشطة المســـار الحــرج الآخــر

بنفس كمية التقليص ، ولإختيار النشاط الذي سيقلص منه شهر واحد يتم إستخراج الميل للنشاط *(2,5)* مضافاً له ميل كل نشاط من أنشطة المسار الحرج الاخر ، ويؤخذ الأقل أي :

activity	*Slope*
(2,5) , (1,3)	*60 + 100 = 160*
(2,5) , (3,4)	*60 + 25 = 85*
(2,5) , (4,5)	*60 +10 =70 min.*

لذا سيقلص شهر واحد من زمن النشاطين *(2,5) , (4,5)* والمسار الحرج الجديد سيكون :



C.P. is (1,2) , (2,5) and (1,3) ,(3,4) , (4,5)
T.C. = 920 + 1 * 70 = 990

لذا فالمشروع قلَص زمنه من *18* إلى *11* وإرتفعت كلفة إنجازه من *580* إلى *990* وهو أقل من الكلفة المتوقعة للتقليص والتي كانت *1340* .

تمارين الفصل السادس

1- إرسم المخطط الشبكي للأنشطة التالية :

أ- الأنشطة A , B , C هي أنشطة بداية المشروع وتبدأ بشكل آني .

ب- الأنشطة D , E , F تبدأ بعد النشاط A مباشرةً .

ج- النشاطان $I . G$ يبدأن بعد إنتهاء النشاطين B , D .

د- النشاط H يبدأ بعد إنتهاء النشاطين C , G .

هـ- النشاطان K , L يعقبان النشاط I .

و- النشاط J يعقب كلٍ من النشاطين E , H .

ز- النشاطان M , N يعقبان النشاط F ولكن لا يبدءان إلا بعد أن ينتهي النشاطين E , H .

ح- النشاط O يعقب النشاطين M , I .

ط- النشاط P يعقب الأنشطة J , L , O .

ي- الأنشطة K , N , P هي أنشطة نهائية للمشروع .

2- أوجد المسار الحرج لشبكة الإعمال الآتية :

activity	*Pre. Act.*	*Duration*		*activity*	*Pre. Act.*	*Duration*
R	----	*24*		*D*	*C , B*	*6*
E	*R*	*16*		*C*	*A*	*8*
H	*G*	*16*		*B*	*A*	*16*
N	*P, Q, U, S*	*8*		*U*	*F*	*8*
M	*L , K*	*8*		*Q*	*E*	*12*
K	*H*	*16*		*A*	*R*	*16*
P	*E , D*	*36*		*F*	*R*	*40*
S	*T , M*	*16*		*G*	*R*	*24*
L	*H*	*24*		*T*	*G*	*4*

(ans.: R , G , H , L , M , S , N ; 120)

3-أوجد المسار الحرج لشبكة الإعمال التالية :

activity	*Pre. Act.*	*Duration*		*Activity*	*Pre. Act.*	*Duration*
A	----	*10*		*J*	*F*	*5*
B	----	*28*		*K*	*E , G , H*	*1*
C	*A*	*2*		*L*	*I , J*	*6*
D	*C*	*1*		*M*	*J , L*	*2*
E	*D*	*2*		*N*	*K , M*	*1*
F	*D*	*30*		*O*	*K , M*	*4*
G	*D*	*45*		*P*	*N*	*1*
H	*B , D*	*1*		*Q*	*N, O*	*1*
I	*E , H*	*6*		*R*	*P , Q*	*1*

(ans.: A , C , D , G , K , O , Q , R ; 65)

4- الجدول التالي يمثل فعاليات مشروع صناعي ، المطلوب إيجاد إحتمالية إنجاز المشروع خلال *39* إسبوعاً وإن الإنحراف المعياري هو *1.9* :

Act.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pre.act.	---	---	A	A,B	A,B	C,D	A	C,D,G	E,F,H
Duration	5	7	6	8	7	5	6	9	10

(ans.: 99.6%)

5- لتنفيذ مشروع صناعي أنشطته موضحة في الجدول التالي :

Act.	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Pre.act.	---	---	A,B	A,B	B	D,E	C,F	D,E	G,H
Duration	6	5	7	8	4	6	7	4	X

المطلوب:أ- أوجد قيمة *X* للنشاط *I* ، إذا علمت إن الدرجة المعيارية للأنشطة الحرجة *Z = 1.5* محسوبة على أساس إحتمالية إنجاز المشروع خلال *34* إسبوعاً والإنحراف المعياري = *2* .

ب- إذا كان النشاط *H* يمثل عملية مد أنابيب بقطر *25* سم وقد أبلغ مورد الأنابيب الشركة بأن عملية تجهيز الأنابيب تتم بعد *16* أسبوعاً من بدء العمل بالمشروع . ما تاثير عملية التأخير؟ وهل ستتحمل الشركة خسائر علماً إن تكاليف التأخير عن المدة المقررة لإنجاز المشروع لكل يوم هي *50000* ديناراً ، بإعتبار أيام العمل بالإسبوع *6* أيام ؟

ج- قدم إقتراح للشركة لتقليص مدة تنفيذ النشاط *C* إلى *5* أسابيع بدلاً من *7* أسابيع على أن تدفع الشركة *25000* ديناراً عن كل يوم تقليص ، هل تقبل الشركة بهذا الإقتراح ؟ علماً إن الربح الذي تحققه الشركة عن الإسراع بتنفيذ المشروع لكل يوم هو *30000* ديناراً .

(ans.: a) 4 ; b) 600000 ; c)- 300000)

6- إذا كانت أنشطة مشروع صناعي كالآتي :

Act.	(a,b,m)
1 , 2	5 , 7 , 6
1 , 4	1 , 5 , 3
1 , 5	2 , 6 , 4
2 , 3	4 , 6 , 5
2 , 5	6 , 10 , 8
2 , 6	8 , 13 , 9
3 , 4	5 , 10 , 9

Act.	(a,b,m)
3 , 6	3 , 5 , 4
4 , 6	4 , 9 , 8
4 , 7	4 , 8 , 6
5 , 6	9 , 14 , 10
5 , 7	4 , 8 , 6
6 , 7	3 , 5 , 4

ما هو إحتمال إنجاز المشروع في مدة *34* إسبوعاً ؟

(ans.: 98.9%)

7- لشبكة الأعمال التالية ، أوجد المدة الزمنية المثلى لتنفيذ المشروع لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

	Normal		crash				normal		crash	
Act.	D_n	C_n	D_c	C_c		Act.	D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	4	100	1	400		3 , 7	14	120	12	140
1 , 4	9	120	6	180		4 , 5	15	500	10	750
1 , 3	8	400	5	640		4 , 7	10	200	6	220
1 , 6	3	20	1	60		5 , 6	11	160	8	240
2 , 3	5	60	3	100		5 , 7	8	70	5	110
2 , 5	9	210	7	270		6 , 7	10	100	2	180
3 , 4	12	400	8	800		∑	---	2460	--	4090

(ans.: 33 ; 3750)

8- أوجد المدة المثلى لإنجاز المشروع التالي لتحقيق أقل كلفة ممكنة :

	normal		crash	
Act.	D_n	C_n	D_c	C_c
1 , 2	5	1000	4	1400
1 , 3	9	2000	7	3000
2 , 3	7	2500	4	3400
2 , 4	9	2800	7	3400
3 , 5	5	2500	2	4600
3 , 6	11	4000	7	7200
4 , 6	6	3000	4	4200
5 , 6	8	800	6	1400
∑	--	18600	--	28600

(ans.: 16 ; 24600)