المعادلات اللاخطية

مقدمة :-

بشكل عام ، فأن معظم المسائل الرياضية لا نملك لها حلاً دقيقاً . وتزامناً مع التطور الحاصل في جميع علوم الحياة فقد تطور علم الرياضيات بشكل مذهل خاصةً فيما يتعلق بالوقت المطلوب لحل المسائل الرياضية ، فبعد ان كان حل مسألة بسيطة في الماضي القريب يتطلب وقتاً طويلاً غير مجدٍ من الناحية العملية بات من الممكن الآن اختصار الزمن بشكل هائل نتيجة التطور السريع في مجال الحاسبات الالكترونية وابتكار اساليب مختلفة لتبسيط انواع معينة من المسائل .

سنتطرق في هذا الفصل الى حل معادلة لاخطية ومجموعة من المعادلات اللاخطية بأبسط الطرق المتوافرة .

اولاً :- حل المعادلة الغير خطية (Solution of Non-Linear Equation)

المقصود بالمعادلة اللاخطية هي اي معادلة تحتوي على قوى مختلفة لـ (X) او دوال مثلثية او اسية او لوغاريتمية ، فعندما يُراد ايجاد جذور المعادلة التالية :-

$$2X^2-4X-3=0$$

يتضح جلياً من هذه المعادلة بأنها معادلة من الدرجة الثانية ويمكن استخدام طريقة الدستور لايجاد جذري هذه المعادلة وبالصيغة التالية :-

$$X=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\quad X_1=\frac{1}{4}(4+\sqrt{40})\quad \&\quad X_2=\frac{1}{4}(4-\sqrt{40})$$

في حين لو حاولنا ايجاد جذور المعادلة :-

$$2X^4+X^3-3X^2+4X-1=0$$

او المعادلة :-

$$X=2\sin X$$

نرى انه لا توجد طريقة نظرية او قانون محدد مباشر لايجاد جذور مثل هذه المعادلات . لذلك يتم اللجوء الى استخدام الطرق العددية التقريبية لايجاد الحلول او الجذور لهذه المعادلات وهذه الحلول تكون تقريبية وغير مضبوطة بالمقارنة لو كان هناك حلول نظرية لهذه المعادلات . توجد طرق عددية

متعددة لحل مثل هذه المعادلات ، وبما ان الجذور التي يمكن تحديدها عدديا هي بالاساس يمكن تحديدها تقريبياً بالرسم او الحساب التقريبي وذلك بتعويض قيمة معينة للجذر ومن ثم حساب قيمة الدالة لهذه المعادلة فإن كان هنالك تغير في قيمة الدالة من الموجب الى السالب او بالعكس فيعني هذا ان هنالك قطع لهذه الدالة لاحداثي (X) وحسب طبيعة الجذر المطلوب ايجاده. والطرق العددية المعتمدة كثيرة تترتب طبيعة اختيارها على السرعة التي يمكن التوصل بها الى حالة التقارب لما يوفر وقتاً في العمليات الحسابية على الحاسبة.

1- طريقة التكرار البسيطة (Simple Iterative Method)

تتميز هذه الطريقة بسهولة الاستخدام ويمكن تطبيقها على مسائل ذات صيغ مختلفة فأذا كانت المعادلة التي يُراد ايجاد جذورها على شكل :- $f(X)=0$ فيمكن اعادة كتابة المعادلة نفسها بالصيغة التالية $X = F(X)$ حيث ان (X) من احد حدود المعادلة $f(X)$ الحاوية على (X) و $F(X)$ هي ما تبقى من المعادلة $f(X)$. وبذلك يمكن ايجاد قيم $(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ بطريقة التكرار المتتالي ابتداءاً من تعويض القيمة الابتدائية المفترضة للجذر (X_0) ، اذ يمكن عزل قيمة (X) على جانب وجعلها تساوي ما تبقى من جذور المعادلة ومن ثم يتم تعويض قيمة (X) التقريبية من جهة اليمين لحساب قيمة جديدة لـ (X) . وهذه القيمة الجديدة لـ (X) تعوض في المعادلة للحصول على قيمة جديدة اخرى لـ (X) وهكذا وكما مبين في الجدول التالي واعتبار (n) يمثل عدد المرات للتعويض :

n	X_n	$F(X_n)$
0	X_0	$F(X_0)$
1	X_1	$F(X_1)$
2	X_2	$F(X_2)$
3	X_3	$F(X_3)$
.	.	.
.	.	.
n	X_n	$F(X_n)$

ومتى ما تساوت قيمة (X_n) مع $F(X_n)$ اي $X_n \simeq F(X_n)$ المحسوبة نكون قد وجدنا قيمة جذر المعادلة $f(X)=0$ الاصلية وهذه المعادلة تتوقف بتأثير شرط الدقة الذي يُعتمد مسبقاً والذي يساوي حاصل الفرق بين X_n و $F(X_n)$. فمثلاً اذا قلنا $(3D)$ نقصد بها ثلاث مراتب عشرية بعد الفارزة مثل (1.752) .

Ex. ③:- Find the root of the following equation:

$e^{-x} - x = 0$ and use ($x = 0.1$) as an initial value.

نرى ان $f(x) = e^{-x} - x$ فلو افترضنا ان

Sol.:- $F(x) = x = e^{-x}$

فيكون الحل كالآتي (العمل لاربع مراتب عشرية) :-

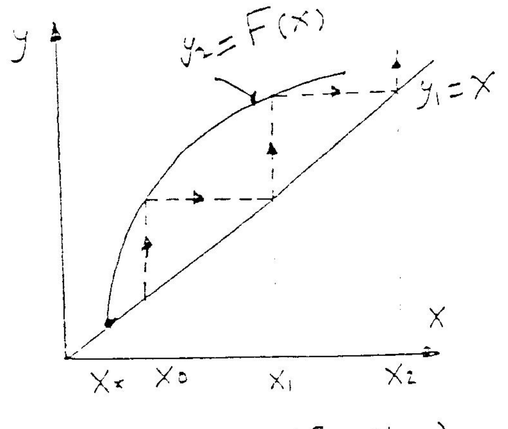
n	X_n	$F(X_n) = e^{-X_n}$
0	0.1000	0.9048
1	0.9048	0.4046
2	0.4046	0.6672
3	0.6672	0.5131
4	0.5131	0.5986
5	0.5986	0.5496
6	0.5496	0.5772
7	0.5772	0.5615
8	0.5615	0.5704
9	0.5704	0.5653
10	0.5653	0.5682

n	X_n	$F(X_n) = e^{-X_n}$
11	0.5682	0.5666
12	0.5666	0.5675
13	0.5675	0.5670
14	0.5670	0.5673
15	0.5673	0.5671
16	0.5671	0.5672
17	0.5672	0.5671
18	0.5671	0.5672
19	0.5672	0.5671
20	0.5671	0.5671

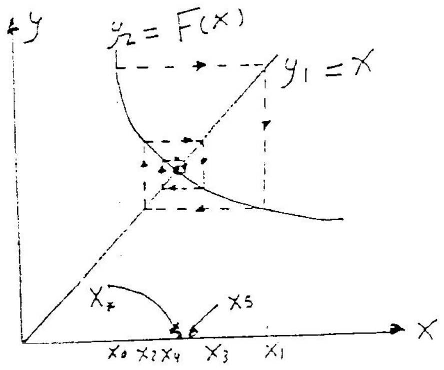
∴ جذر هذه المعادلة هو (0.5671) اي ان $X_* = 0.5671$

شروط التقارب (Convergence) والتباعد (Divergence) بطريقة التكرار البسيطة

لم تكن العملية دائماً صائبة عند ايجاد جذر المعادلة اللاخطية بطريقة التكرار البسيطة بسبب مشكلة التقارب. والتقارب يمكن ان يعرف في خطة الحل العددية بأنه قدرة الخطة لايجاد الحل التقريبي الصحيح لحل المعادلات فيما اذا كانت هذه المعادلات جبرية او تفاضلية او تكاملية، وفيما يلي امثلة تخطيطية لتوضيح حالات التقارب والتباعد لهذه الطريقة :-



(حالة تباعد)



(حالة تقارب)

وبذلك يمكن الاستنتاج من الشكلين السابقين ان الشرط الرئيس اللازم للتقارب عند ايجاد جذور المعادلة اللاخطية بأستخدام طريقة التكرار البسيطة للمعادلة بالصيغة $x = F(x)$ وصولاً الى الجذر (x) او (x^*) هو ان القيمة المطلقة للمشتقة هي اقل من واحد : $|F'(x)| < 1$

حيث ان (x) هنا اي قيمة ضمن مجال التغير لـ $(f(x))$ من السالب الى الموجب او العكس .

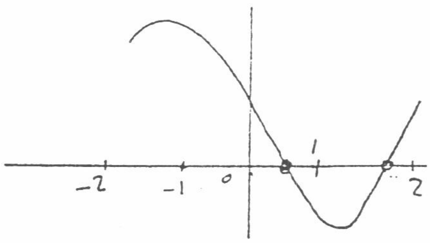
وقد تكون هناك صيغ مختلفة لتعريف (x) بدلالة ما تبقى من جذور المعادلة الاصلية معتمدين في ذلك على المجال الذي يتحقق به جذر المعادلة ومن ثم تطبيق الشرط اعلاه .

Ex.②:- Find the root of the equation $2x^3 - 7x + 2 = 0$ using the simple iterative method.

So.:-

عند بداية الحل يمكن التعرف على القيمة الابتدائية للحل (Initial Value) بطريقة الرسم - كما في الشكل ادناه - او بطريقة اختبار تغير الاشارة من الموجب الى السالب او بالعكس حيث يدل تغير الاشارة للدالة $f(x)$ الى ان هذه الدالة تقطع الاحداثي الافقي ضمن القيم لـ (x) وكما مبين في الجدول ادناه :

x	-1	0	1	2
$f(x) = 2x^3 - 7x + 2$	+	+	-	+



حيث نلاحظ ان هنالك قطع او تغير بالاشارة للفترتين $0 \leq x \leq 1$ و $1 \leq x \leq 2$ نفرض (x) من المعادلة الاصلية وليكن من الحد الثاني فتكون المعادلة :

$$F(x) = x = \frac{2}{7}(x^3 + 1) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{2}{7}(x_n^3 + 1)$$

وبتطبيق شرط التقارب على هذه المعادلة فان : $F'(x) = \frac{6}{7}x^2$

وبالتعويض عن قيمة (x) في المجال $0 \leq x \leq 1$ فقط نجد ان $F'(0) = 0$ او ان $F'(1) = 0.857$ حيث انهما اقل من (1) . $\therefore |F'(x)| < 1$

اي ان التقارب متحقق .

بعد ذلك يمكن الحل باختيار قيمة (X) الابتدائية في اي نقطة ضمن المجال (1 → 0)
لتحديد الجذر في هذه الحالة، وكما مبين ادناه :-

n	Xn	$F(Xn) = \frac{2}{7}(Xn^3 + 1)$
0	1.0000	0.5714
1	0.5714	0.3390
2	0.3390	0.2968
3	0.2968	0.2932
4	0.2932	0.2929
5	0.2929	0.2929

أو

n	Xn	F(Xn)
0	0.0000	0.2857
1	0.2857	0.2924
2	0.2924	0.2929
3	0.2929	0.2929

$\therefore X_* = 0.2929$

لاحظ ان التقارب كان اسرع عندما كان $X_0 = 0$ ذلك لان الجذر (X_*) اقرب
الى الصفر منه الى الواحد .

EX.(3):- Find another root for the equation of the previous example by using the same method.

Sol:-

$$2X^3 - 7X + 2 = 0 \Rightarrow X = \sqrt[3]{\frac{7}{2}X - 1} = F(X)$$

$$F'(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}X - 1\right)^{-\frac{2}{3}} * \frac{7}{2} \Rightarrow F'(2) = 0.3533 \leq 1$$

n	Xn	F(Xn)
0	1.0000	1.3572
1	1.3572	1.5536
2	1.5536	1.6433
3	1.6433	1.6812
4	1.6812	1.6967

n	Xn	F(Xn)
5	1.6967	1.7029
6	1.7029	1.7054
7	1.7054	1.7064
8	1.7064	1.7068
9	1.7068	1.7070
10	1.7070	1.7071
11	1.7071	1.7071

$\therefore X_* = 1.7071$

في هذه المعادلة البسيطة يتم الحساب مثلاً عن طريق خزن الرقم (7/2) وضرب الـ(X)
الجديد به ثم طرح (1) منه ثم اخذ الجذر المكعب، والناتج (الـ(X) الجديد)
تجرى له نفس العمليات وهكذا وصولاً الى الاستقرار .

هل يمكن ايجاد جذر ثالث من المعادلة نفسها بترتيب آخر ؟ لماذا ؟

$$2X^3 - 7X + 2 = 0 \Rightarrow X(2X^2 - 7) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$X = \frac{-2}{2X^2 - 7}$$

أمثلة وأسئلة

① Find the root of the equation $x = \cos x$ using the simple iterative method.

Sol.:-

$f(x) = x - \cos x$

x	-1	0	1	2
$f(x) = x - \cos x$	−	−	+	+

$F(x) = x = \cos x$

$F'(x) = -\sin x \Rightarrow |F'(0)| = 0 < 1$

or $|F'(1)| = 0.841 < 1$

ملاحظة:- ان اغلب المسائل الحاوية على الدوال المثلثية يكون الحل لها باستخدام النظام النصف قطري (Rad.) .

n	X_n	X_{n+1}
0	0.00	1.00
1	1.00	0.54
2	0.54	0.86
3	0.86	0.65
4	0.65	0.79
5	0.79	0.70

n	X_n	X_{n+1}
6	0.70	0.76
7	0.76	0.72
8	0.72	0.75
9	0.75	0.73
10	0.73	0.74
11	0.74	0.74

$\therefore X_* = 0.74$

② Find the root of the following equation $x^2 - 4 = \ln x$, use $(x_0 = 1.000)$

Sol.:-

$$x = \sqrt{\ln x + 4} = F(x) = (\ln x + 4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(\ln x + 4)^{-\frac{1}{2}} * \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\ln 1 + 4}} * \frac{1}{1} = 0.25 < 1$$

جرب العمل لـ 2D ولـ 4D

(3D) Three Decimal Digits ثلاث مراتب عشرية

n	X_n	$X_{n+1} = \sqrt{\ln X_n + 4}$
0	1.000	2.000
1	2.000	2.166
2	2.166	2.185
3	2.185	2.187
4	2.187	2.187

$\therefore X_* = 2.187$

(3) Find one root of the equation $2X^5-2X-1=0$, Start with $(X_0=0.000)$

$$X=\sqrt[5]{\frac{2X+1}{2}} \Rightarrow F'(X)=\frac{1}{5}\left(\frac{2X+1}{2}\right)^{\frac{1}{5}-1}\cdot 1$$

$$\therefore F'(0)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8}=0.348 \Rightarrow |F'(X_0)|<1$$

n	X_n	X_{n+1}
0	0.000	0.871
1	0.871	1.065
2	1.065	1.094
3	1.094	1.098
4	1.098	1.098

$\therefore X_* = 1.098$

جرب الحل لترتيب آخر للمعادلة مثل :-

$$X=\frac{2X^5-1}{2}$$

وهل يحصل تقارب ام تباعد ؟

ثم جرب الترتيب الآتي :-

$$2X(X^4-1)-1=0$$

(4) By using the simple iterative method, find one root of the following equations:

4D $(X_*=0.3574 = Ans.)$ $4X=e^X$ (A)

5D $(X_*=0.00883 = Ans.)$ $e^{2X}\cdot\tan X=e^{-\frac{3\pi}{2}}$ (B)

4D $(X_*=0.2029 = Ans.)$ $10X=2^{X^2}+1$ (C)

3D $(X_*=0.012 = Ans.)$ $\sin X=\frac{1}{(X^2-\ln X)^3}$ (D)

(5) Find the three real roots for the following equation by using the simple iterative method.

(3D) $e^X-3X^2=0$

$(X_{3*}=3.733$ & $X_{2*}=0.910$ & $X_{1*}=-0.459 = An.)$

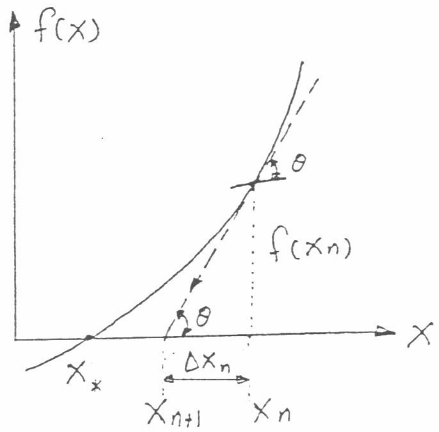
(6) Find two points of intercept for the following equation with the x-axis, then be sure by using the simple iterative method.

(4D) $X^2-2X-3=0$

$((3,0)$ & $(-1,0)$ $= Ans.)$

2- طريقة نيوتن - رافسن
Newton-Raphson Method

تعتبر هذه الطريقة أكثر فعالية للوصول الى حالة التقارب، وكما مبين في الشكل ادناه لو كانت العملية التكرارية قد اوصلت التقريب عند النقطة (X_n)، اذن يُراد زيادة صغيرة مقدارها (ΔX_n) للوصول الى الحل.



يمكن تمثيل هذه الدالة بصيغة سلسلة تايلور (Taylor Series) وبالصيغة التالية :-

$$0 = f(X) = f(X_n) + \Delta X_n \frac{f'(X_n)}{1!} + \Delta X_n^2 \frac{f''(X_n)}{2!} + \cdots$$

وبفرض (ΔX_n) صغيرة واعتبار الحدين الاولين لهذه السلسلة واهمال الحدود من الدرجة الثانية فما فوق نحصل على :-

$$f(X_n) + \Delta X_n f'(X_n) = f(X) = 0$$

أو :-

$$\Delta X_n = -\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

وهذه تؤدي الى معادلة نيوتن - رافسن حيث ان :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_n = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

وهناك طريقة بيانية لتمثيل هذه العلاقة - كما في الشكل اعلاه - وكما يلي :

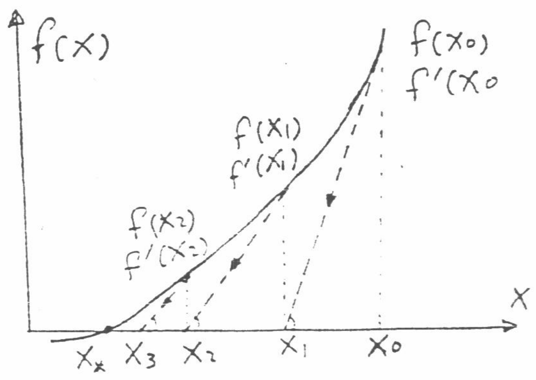
الانحدار عند المماس = $\tan\theta$ لكن :

$$\tan\theta = \frac{f(X_n)}{\Delta X_n} = f'(X_n)$$

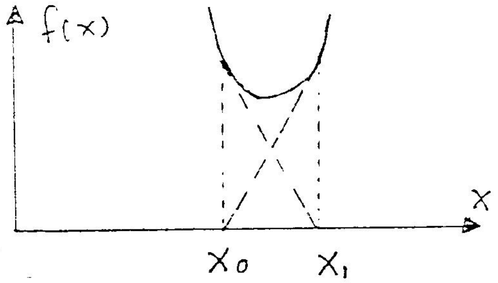
وبما ان : $X_n = X_{n+1} + \Delta X_n$ فأن :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

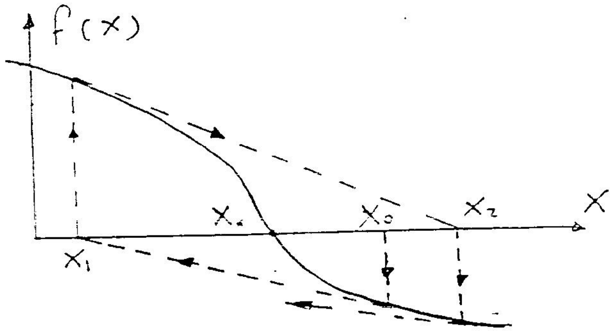
وعلى العموم يمكن تمثيل حالة التقارب وكما مبين في الشكل :



كما ان هناك حالات مختلفة تتحول فيها صيغة التباعد عن جذر المعادلة اللاخطية وكما موضحة في الشكلين ادناه :-



حالة التذبذب الترددي



حالة التباعد

شروط التقارب بطريقة نيوتن - رافسن :-

لو افترضنا ان جذر المعادلة اللاخطية هو (X) محصور بين (a) و (b) حيث ان $b \leq X \leq a$ لذا فان هناك عدة شروط للتقارب وهي :-

أ- ان حاصل ضرب $f(a)$ و $f(b)$ هو اقل من صفر $(f(a) \cdot f(b) < 0)$، وهذا يعني ان كل من $f(a)$ و $f(b)$ ذو اشارة مغايرة لاحدهما الآخر اي بمعنى آخر ان المعادلة المتمثلة بـ $y = f(X)$ تقطع الاحداثي (X) على الاقل مرة واحدة خلال المجال $(a \to b)$ بحيث يكون هناك جذر واحد لهذه المعادلة .

ب- المشتقة الاولى للدالة لا تساوي صفراً $(f'(X) \neq 0 \quad for \; a \leq X \leq b)$.

ج- المشتقة الثانية للدالة لا تتغير اشارتها ضمن المجال $(a \to b)$.

د- اذا كان من السهل ايجاد المشتقة الثانية $(f''(X))$ اذن من السهولة التأكد من حالة التقارب بأثبات العلاقة : $f(X) \cdot f''(X) > 0$

Ex. 1 :- Prove that the following function is converge :

$$f(x) = X^3 + X - 1 = 0$$

Sol:-

(أ) $f(0) = -1 \;\&\; f(1) = +1 \Rightarrow (-1) * (+1) < 0$

	b	a	
X	1	0	-1
f(X)	+	-	-

(ب) $f'(X) = 3X^2 + 1 \Rightarrow f'(a) \;\&\; f'(b) \neq 0$

(ج) $f''(X) = 6X \Rightarrow 6(1) = +6$

(د) $f(1) \cdot f''(1) = 1 * 6 = 6 > 0$

Ex. ② :- Find the root of the previous example equation. ($X_0 = 1.000$)

Sol :-

$f(X) = X^3 + X - 1$

$f'(X) = 3X^2 + 1$

$\Delta X_n = -\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

$X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$

n	X_n	$f(X_n)$	$f'(X_n)$	ΔX_n	X_{n+1}
0	1.000	1.000	4.000	-0.250	0.750
1	0.750	0.172	2.688	-0.064	0.686
2	0.686	0.009	2.412	-0.004	0.682
3	0.682	0.000	2.397	0	0.682

$\therefore X_* = 0.682$

لاحظ انه اذا كانت $f(X_n)$ تساوي صفراً (أو قريباً جداً من الصفر مثل 0.0001 او 0.0001- اذا كان المطلوب 3D مثلاً) فأن ذلك يعني انه لا يوجد تغير في الجذر (اي $X_{n+1} = X_n$).

Ex. ③ :- Find the root of the following equation by using Newton-Raphson method. ($X_0 = -0.5$) (3D) ثلاث مراتب عشرية

Sol :- $\dfrac{1}{X} + 1 = 0$

$f(X) = \dfrac{1}{X} + 1$

$f'(X) = -\dfrac{1}{X^2}$

$\therefore X_{n+1} = X_n - \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

n	X_n	$f(X_n)$	$f'(X_n)$	X_{n+1}
0	-0.500	-1.000	-4.000	-0.750
1	-0.750	-0.333	-1.778	-0.937
2	-0.937	-0.067	-1.138	-0.996
3	-0.996	-0.004	-1.008	-1.000
4	-1.000	0.000	1.000	-1.000

$\therefore X_* = -1.000$

الحالات الخاصة (Special Cases) لطريقة نيوتن - رافسن :-

أ- ايجاد الجذور التربيعية (Square Roots) :

لو حاولنا ايجاد الجذر التربيعي لاي رقم وليكن (r) وان ($r > 0$) بأستعمال طريقة نيوتن- رافسن فأننا نعتبر : $f(X) = X^2 - r$ وان $f(X) = 0$ وبذلك فأن $X = \sqrt{r}$ فيكون لدينا الآن :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = X_n - \frac{X_n^2 - r}{2X_n} = \frac{1}{2}\left\{X_n + \frac{r}{X_n}\right\}$$

Ex. ④:- Find the square root of (10) by using Newton-Raphson method:

Sol:- نحن نعلم ان اقرب عدد لـ (١٠) معلوم جذره التربيعي هو (٩)
وان جذره هو (3) لذلك نبدأ بـ (3.0000) ، (مثلاً 4D)

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{r}{X_n}\right)$$

حيث ان (r) هنا هو (١٠)

n	X_n	X_{n+1}
0	3.0000	3.1667
1	3.1667	3.1623
2	3.1623	3.1623

$$\therefore \sqrt{10} \simeq 3.1623$$

ب - الجذر لأي رتبة اختيارية (Arbitarary Order):
اذا كان $f(x) = x^k - r$ حيث $r > 0$ و k اي رقم صحيح ،
بأتباع نفس التحليل في الفقرة (أ) يكون لدينا:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{X_n^k - r}{k X_n^{k-1}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X_n + \frac{r}{k} X_n^{1-k}$$

حيث ان k هو أس الجذر ، ويمكن ان يكون 2 او 3 او 4 او ..... الخ .

Ex. ⑤:- Evaluate $\sqrt[3]{7}$ by using Newton-Raphson method. work to 5D

الاقرب هو (8) وجذره (2)

Sol:-
$$X_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) X_n + \frac{r}{k} X_n^{1-k}$$

$$\therefore X_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) X_n + \frac{7}{3} X_n^{1-3}$$
$$= \frac{2}{3} X_n + \frac{7}{3 X_n^2}$$

n	X_n	X_{n+1}
0	2.00000	1.91667
1	1.91667	1.91294
2	1.91294	1.91293
3	1.91293	1.91293

$$\therefore \sqrt[3]{7} \simeq 1.91293$$

2- ايجاد مقلوب (Reciprocal) اي رقم :
اذا كان الرقم المعطى هو (r) حيث (r > 0) فمقلوبه يكون $x = \frac{1}{r}$
ويمكن وضعه بالصيغة $f(x) = \frac{1}{x} - r = 0$ لكي نستطيع استعمال

طريقة نيوتن- رافسن فتكون :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{(1/X_n) - \gamma}{-(1/X_n^2)} = X_n (2 - \gamma X_n)$$

Ex. ⑥:- Find the reciprocal of (6) by using Newton - Raphson method. (4D)

So.:-

$$X_{n+1} = X_n (2 - \gamma X_n)$$
$$= X_n (2 - 6 X_n)$$

من الممكن ان ابدأ بأي رقم ولكن كلما قرب الرقم من مقلوب الـ (6) كان التقارب والحل اسرع / ومثال على ذلك نأخذ مقلوب الـ (5) وهو (0.2) ومقلوب رقم الـ (4) مثلاً وهو (0.25) .

n	X_n	X_{n+1}
0	0.2000	0.1600
1	0.1600	0.1664
2	0.1664	0.1667
3	0.1667	0.1667

n	X_n	X_{n+1}
0	0.2500	0.1250
1	0.1250	0.1563
2	0.1563	0.1660
3	0.1660	0.1667
4	0.1667	0.1667

$$\therefore \frac{1}{6} \simeq 0.1667$$

امثلة واسئلة

① Find the root of the folowing equation by using Newton-Raphson method. (4D) . Note: the function is converge.

$$f(X) = \sin X - 4X + 1$$
$$f'(X) = \cos X - 4$$

X	-1	0	1
f(X)	+	+	-

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

{ ابدأ بـ $X_0 = 1.0000$

ايهما اسرع؟ لماذا؟ }

n	X_n	$f(X_n)$	$f'(X_n)$	X_{n+1}
0	0.0000	1.0000	-3.0000	0.3333
1	0.3333	-0.0061	-3.0550	0.3313
2	0.3313	0.0000		0.3313

$$\therefore X_* = 0.3313$$

② Find the root of the equation below by Newton - Raphson method , work to (3D) . Note: the function is converge.

$$f(x) = e^{x} + x^{2} - 10x$$

Sol:-

$$f'(x) = e^{x} + 2x - 10$$

x	-1	0	1
f(x)	+	+	−

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0.000	1.000	−9.000	0.111
1	0.111	0.019	−8.660	0.113
2	0.113	0.000		0.113

$\therefore x_* = 0.113$

③ Find the root of the following equation by using Newton - Raphson method $f(x) = \frac{1 - 0.16x}{x}$, then solve the equation started with ($x_0 = 1.500$) work to (3D)
($x_* = 6.249$ = Ans.)

④ Try to solve all the examples and questions of the simple iterative method by using Newton - Raphson method , then try the opposite , what will you found ?

⑤ Find the root of each equation below by using Newton - Raphson method

(3D) ($x_* = -0.546$ = Ans.) $f(x) = 2 - x \cdot e^{2x} + 4x$ (A)

(3D) ($x_* = 0.473$ = Ans.) $f(x) = 1 + \cos x - 4x$ (B)

(4D) ($x_* = 0.4436$ = Ans.) $f(x) = e^{-x} - \sin(\frac{1}{2}\pi x)$ (C)

⑥ By using Newton - Raphson method , find two roots for the following equation:

$x^4 - 6x^2 - 13x + 1 = 0$ (5D)

($x_{2*} = 3.16373$, $x_{1*} = 0.07438$ = Ans.)

ثانياً :- حل المعادلات الجبرية الآنية غير الخطية

(Solution of Non Linear Simultaneous Algebraic Equations)

ان الصيغة العامة للانظمة الجبرية غير الخطية يمكن ان تمثل بالشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z,\dots)&=0 \\ g(x,y,z,\dots)&=0 \\ h(x,y,z,\dots)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \dots(1)$$

سنأخذ طريقتين لحل هذه المعادلات .

١- طريقة التكرار

يتم هنا ترتيب المعادلات في (١) بحيث نخرج (x) من المعادلة الاولى و (y) من الثانية و (z) من الثالثة وهكذا ، وتصبح :

$$\left.\begin{aligned} x&=F(x,y,z,\dots) \\ y&=G(x,y,z,\dots) \\ z&=H(x,y,z,\dots) \end{aligned}\right\} \quad \dots(2)$$

و يجب ان يكون شرط التقارب التالي متحققاً :

$$|F_x|+|F_y|+|F_z|+\dots<1$$

$$|G_x|+|G_y|+|G_z|+\dots<1$$

$$|H_x|+|H_y|+|H_z|+\dots<1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \dots<1$$

ان المجال الذي يؤدي الى تقارب القيم الابتدائية من الحل يطلق عليه مدى التقارب وان اي قيمة ابتدائية خارج هذا المدى سوف لا تؤدي الى الحل .

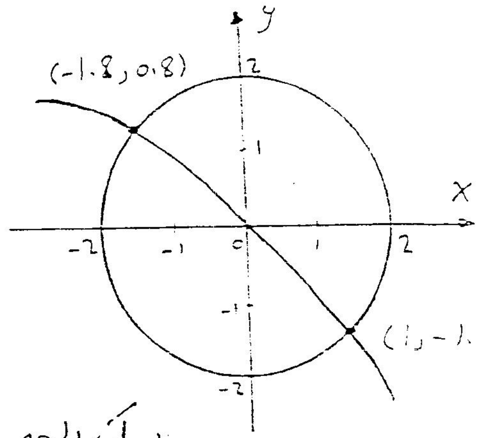
Ex. ①:- Solve the following pair of nonlinear equation by using the iterative method:

$$x^2+y^2=4$$

$$e^x+y=1$$

Sol:-

يمكن تحديد الافتراض الابتدائي لنقطتي التقاطع من خلال تقاطع الدائرة $x^2+y^2=4$ مع المنحني $y=1-e^x$



يبين الشكل بأن نقطتي التقاطع هي (-1.8، 0.8) و (1، -1.7) تقريبا يمكن اعادة ترتيب المعادلتين بالصيغة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} X = \pm\sqrt{4 - y^2} \\ y = 1 - e^{x} \end{array}\right\} \text{---- (أ)}$$

يمكن الحصول على القيم المتتالية وذلك بالبدء بقيمة (y = 0.8) في المعادلة (أ) هكذا :

قيم X :		-1.8330	-1.8150	-1.8164	-1.8163	-1.8163
قيم y :	0.8000	0.8401	0.8372	0.8374	0.8374	

$$\therefore X1_{*} = -1.8163 \;\&\; y1_{*} = 0.8374$$

اي يتم تعويض اول قيمة لـ (y) في المعادلة الاولى لاخراج (X) وتضعه بالسالب في المعادلة الثانية لاخراج (y) وهكذا ، لاحظنا ان قيمة (X) الموجبة لاتؤدي الى حل جرب ذلك ،

وعند البدء بقيمة (y = -1.7) لايجاد الجذر الى يمين نقطة الاصل نحصل على :

X :		1.0536	0.7149	1.7059	قيمة خيالية
y :	-1.7000	-1.5579	-1.0440	-4.5062	

اي لا يمكن ايجاد الجذر الثاني بأعتماد هذا الترتيب ايضاً ، ويمكن ملاحظة ظاهرة التباعد للمعادلتين عند البدء بقيمة (X = 1.0) ، على كل حال يمكن اعتبار ترتيب آخر للمعادلتين الاصليتين هكذا :

$$\left.\begin{array}{l} X = \ln(1 - y) \\ y = \pm\sqrt{4 - X^2} \end{array}\right\} \text{--- (ب)}$$

فنحصل على :

X :		0.9933	1.0065	1.0037	1.0043	1.0041	1.0042	1.0042
y :	-1.7000	-1.7359	-1.7283	-1.7299	-1.7296	-1.7297	-1.7296	-1.729

$$\therefore X2_{*} = 1.0042 \;\&\; y2_{*} = -1.7296$$

لاحظ نسبة الخطأ البسيطة في الجذور .

Ex: ② :- Solve the following two equation by using the iterative method to get a solution near the origin point;

$$X^2 + X - y^2 = 1 \qquad (3D)$$
$$y - \sin(X^2) = 0$$

علماً ان التقارب الاول يحصل عن الترتيب :

$$\left.\begin{array}{l} X = 1 + y^2 - X^2 \\ y = \sin(X^2) \end{array}\right\} \text{--- (أ)}$$

وان التقارب الثاني يحصل عن الترتيب :

(الجزء السالب)

$$\left.\begin{array}{l} X = \mp\sqrt{1 - X + y^2} \\ y = \sin(X^2) \end{array}\right\} \text{--- (ب)}$$

Sol :-

نقطة الاصل هي $(X, y) = (0, 0)$

اي نبدأ بتعويض $(X = 0)$ او $(y = 0)$

من (أ) فأن :

X : 0.000 → 1.000 → 0.708 → 0.730
y : 0.000 → 0.841 → 0.481

X : 0.725 → 0.726 → 0.726
y : 0.508 → 0.502 → 0.503 → 0.503

$$\therefore X_{1*} = 0.726 \quad \& \quad y_{1*} = 0.503$$

ومن (ب) فأن :

X : −1.000 → −1.414 → −1.554 → −1.599
y : 0.000 → 0.018 → 0.035 → 0.042

X : −1.613 → −1.617 → −1.618 → −1.619 → −1.619
y : 0.045 → 0.045 → 0.046 → 0.046 → 0.046

$$\therefore X_{2*} = -1.619 \quad \& \quad y_{2*} = 0.046$$

2- طريقة نيوتن التكرارية

تعتبر هذه الطريقة الاكثر شيوعاً لحل انظمة المعادلات الجبرية غير الخطية. وذلك لان خواص التقارب فيها تكون احسن من الطريقة السابقة. ان اساس طريقة نيوتن التكرارية هو مفكوك تايلور (Taylor Expansion) لكل معادلة من المعادلات:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) = 0 = f(x, y, z, \dots) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} + \dots + \text{حدود ذات رتب عليا}$$

$$g(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) = 0 = g(x, y, z, \dots) + \Delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial g}{\partial z} + \dots + \text{حدود ذات رتب عليا}$$

$$h(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \dots) = 0 = h(x, y, z, \dots) + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial h}{\partial z} + \dots + \text{حدود ذات رتب عليا}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

وباهمال الحدود ذات الرتب العليا تتحول المسألة الى ايجاد الجذور للنظام الخطي التالي:

$$\left.\begin{aligned}
f + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} + \dots &= 0 \\
g + \Delta x \frac{\partial g}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial g}{\partial z} + \dots &= 0 \\
h + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial h}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial h}{\partial z} + \dots &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &= 0
\end{aligned}\right] \dots (I)$$

حيث تحسب المشتقات الجزئية والدوال عند اي قيم حل تقريبية، فنستخرج من النظام الخطي للمعادلات اعلاه Δx و Δy و Δz و .... وبالتالي نحصل على:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$z_1 = z_0 + \Delta z$$

ونستمر في هذه العملية لايجاد بقية القيم ، وبصورة عامة فأن :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta X_n$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$
$$Z_{n+1} = Z_n + \Delta Z_n$$

Ex. (1):- Starting with $(x_0, y_0) = (2, 0)$, Solve the following set of nonlinear equations:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$xy - 1 = 0$$

Sol:-

نجعل: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$

$g(x, y) = xy - 1$

ثم نحصل على: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial g}{\partial x} = y$; $\frac{\partial g}{\partial y} = x$

وبالتعويض عن $x_0 = 2$ و $y_0 = 0$ نحصل على:

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 - 4 = 0 \quad \&$$
$$\& \quad g(x_0, y_0) = x_0 y_0 - 1 = -1$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 * 2 = 4$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 * 0 = 0$ و $\frac{\partial g}{\partial x} = y_0 = 0$ و $\frac{\partial g}{\partial y} = x_0 = 2$

بعد تعويض قيم المشتقات الجزئية هذه في مجموعة المعادلات (I) نحصل على:

$$4 * \Delta x_0 + 0 * \Delta y_0 = -f(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$0 * \Delta x_0 + 2 * \Delta y_0 = -g(x_0, y_0) = +1$$

$$\left.\begin{array}{l} 4\Delta x_0 = 0 \\ 2\Delta y_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x_0 = 0 \text{ و } \Delta y_0 = \frac{1}{2}$$

والآن فأن عملية التكرار الاولى تعطي:

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 2 + 0 = \underline{2}$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} = \underline{1/2}$$

وبتطبيق نفس الخطوات على عملية التكرار الثانية نحصل على:

$$f(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 - 4 = (2)^2 + (1/2)^2 - 4 = 1/4 \quad \&$$
$$g(x_1, y_1) = x_1 y_1 - 1 = 2 * 1/2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x_1 = 2*2 = 4 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y_1 = 2*1/2 = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y_1 = 1/2 \text{ و } \frac{\partial g}{\partial y} = x_1 = 2$$

وبعد التعويض بالمشتقات الجزئية في مجموعة المعادلات (I) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} 4\Delta x_1 + \Delta y_1 &= -\frac{1}{4} \\ \Delta x_1 + 4\Delta y_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_1 = -\frac{1}{15} \text{ و } \Delta y_1 = +\frac{1}{60}$$

وبذلك فأن عملية التكرار الثانية تعطي :

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = 2 - \frac{1}{15} = \underline{1.9333} \quad \&$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{60} = \underline{0.5167}$$

والآن عملية التكرار الثالثة :

$$f(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 - 4 = (1.9333)^2 + (0.5167)^2 - 4 = 0.0048$$

$$g(x_2, y_2) = x_2 y_2 - 1 = 1.9333 * 0.5167 - 1 = -0.0011$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x_2 = 2*1.9333 = 3.8667 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y_2 = 2*0.5167 = 1.0334$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y_2 = 0.5167 \text{ و } \frac{\partial g}{\partial y} = x_2 = 1.9333$$

$$\left.\begin{aligned} 3.3667\,\Delta x_2 + 1.0334\,\Delta y_2 &= -0.0048 \\ 0.5167\,\Delta x_2 + 1.9333\,\Delta y_2 &= 0.0011 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نحل المعادلات آنياً

$$\Delta x_2 = \frac{0.0011 - 1.9333\,\Delta y_2}{0.5167} \Rightarrow$$

نعوضها في الاولى

$$\therefore 3.8667\left(\frac{0.0011 - 1.9333\,\Delta y_2}{0.5167}\right) + 1.0334\,\Delta y_2 = -0.0048 \Rightarrow$$

$$\Delta y_2 = -0.0003 \text{ و } \Delta x_2 = 0.0031$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x_2 = 1.9333 + 0.0031 = \underline{1.9364}$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 0.5167 - 0.0003 = \underline{0.5167}$$

ونستمر هكذا الى ان يحصل التقارب (اي $\Delta x = \Delta y \simeq 0.0$)

اكمل الحل

EX.(2):- Find the roots of the following set of non-Linear equations, assume (by trial and error) that: $X_o = 1.5$ & $y_o = 2.0$

$$X^2 + 2y^2 - 22 = 0$$
$$-2X^2 + Xy - 3y + 11 = 0$$

Sol.:-

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 22 \quad \&$$
$$g(X,y) = -2X^2 + Xy - 3y + 11 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 2X \ ; \ \frac{\partial g}{\partial X} = -4X + y \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y \ ; \ \frac{\partial g}{\partial y} = X - 3$$

وبذلك يمكن حساب الدالتين والمشتقات الجزئية عند (X_o) و (y_o) حيث ان:

$$f(X,y) = (1.5)^2 + 2(2)^2 - 22 = -11.75$$
$$g(X,y) = -2(1.5)^2 + (1.5)(2) - 3(2) + 11 = 3.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 3 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 8 \ ; \ \frac{\partial g}{\partial X} = -4 \ ; \ \frac{\partial g}{\partial y} = -1.5$$

وبعد التعويض نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} 3\,\Delta X_o + 8\,\Delta y_o &= 11.75 \\ -4\,\Delta X_o - 1.5\,\Delta y_o &= -3.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta y_o = 1.327 \ \& \ \Delta X_o = 0.377$$

وبذلك فان:

$$X_1 = 1.5 + 0.377 = \underline{1.877} \ ;$$
$$y_1 = 2 + 1.327 = \underline{3.327}$$

وبعد استخدام هاتين القيمتين لعملية تكرارية أخرى فانها تؤدي الى:

$$\Delta X_1 = 0.136 \ \& \ \Delta y_1 = -0.313$$

وبذلك فان:

$$X_2 = 1.877 + 0.136 = \underline{2.013} \ \&$$
$$y_2 = 3.327 - 0.313 = \underline{3.014}$$

[وان قيم الحل الصحيح هي: $X = 2 \ ; \ y = 3$]

* ملاحظات عامة حول طريقة نيوتن التكرارية

أ- يمكن استخدام طريقة نيوتن التكرارية المحورة اذا كان عدد المعادلات غير الخطية كبير حيث في هذه الطريقة تستعمل المعادلات الابسط التالية :

$$x = x_0 - \frac{f(x_0, y_0, z_0, \dots)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dots)} \quad \& \quad y = y_0 - \frac{g(x_0, y_0, z_0, \dots)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dots)} \quad \&$$

$$z = z_0 - \frac{h(x_0, y_0, z_0, \dots)}{\frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \dots)}$$

لكن هنا ولسوء الحظ فان مشكلة التباعد سوف تزداد وان مدى الاقتراب يقل لذا يجب ان تكون القيم الابتدائية قريبة من الجذور .

EX.③:- Solve the following set of non linear equations, take: $(x_0, y_0) = (1, -1.7)$

(i) $x^2 + y^2 = 4$
$e^x + y = 1$

(ii) $e^x - y = 0$
$xy - e^x = 0$

So.:-

(i) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 0$; $g(x, y) = 1 - e^x - y = 0$

بحيث ان :-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n, y_n)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)} = x_n - \frac{4 - x_n^2 - y_n^2}{-2x_n}$$

$$\therefore x_1 = 1 - \frac{0.110}{-2} = \underline{1.055}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{g(x_n, y_n)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_n, y_n)} = y_n - \frac{1 - e^{x_n} - y_n}{-1}$$

$$\therefore y_1 = -1.7 - \frac{-0.0183}{-1} = \underline{-1.7183}$$

$$x_2 = 1.055 - \frac{-0.0655}{-2.11} = \underline{1.023} \quad ; \quad y_2 = -1.7183 - \frac{-0.1536}{-1} = \underline{-1.8719}$$

$$x_3 = 1.023 - \frac{-0.5505}{-2.046} = \underline{0.754} \quad ; \quad y_3 = -1.8719 - \frac{0.0903}{-1} = \underline{-1.7815}$$

$$x_4 = 0.754 - \frac{0.2577}{-1.508} = \underline{0.925} \quad ; \quad y_4 = -1.7815 - \frac{0.656}{-1} = \underline{-1.1255}$$

وهذا بالطبع يؤدي الى حالة عدم التقارب بصورة سريعة .

(ii): $f(x,y) = e^{x} - y = 0$ و $g(x,y) = xy - e^{x} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x} \quad و \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - y_n}{e^{x_n}} \quad \& \quad y_{n+1} = y_n - \frac{x_n y_n - e^{x_n}}{x_n}$$

وبعد التعويض لـ ($x_0 = 0.95$ و $y_0 = 2.7$) نحصل على :

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - y_0}{e^{x_0}} = 0.95 - \frac{e^{0.95} - 2.7}{e^{0.95}} = \underline{0.9942}$$

&

$$y_1 = y_0 - \frac{x_0 y_0 - e^{x_0}}{x_0} = 2.7 - \frac{0.95 * 2.7 - e^{0.95}}{0.95} = \underline{2.7218}$$

$$x_2 = 0.9942 - \frac{e^{0.9942} - 2.7218}{e^{0.9942}} = \underline{1.0013}$$

$$y_2 = 2.7218 - \frac{0.9942 * 2.7218 - e^{0.9942}}{0.9942} = \underline{2.7183}$$

يمكن ملاحظة حالة التقارب بوضوح وبسرعة بالمقارنة مع الحالة (i) .

ب - في بعض الاحيان يتم التعامل مع انظمة المعادلات غير الخطية بتقليل عدد المعادلات وجعلها لمتغير واحد، فمثلاً نظام المعادلات غير الخطية السابق :

$$4 - x^{2} - y^{2} = 0 \cdots\cdots (1)$$
$$1 - e^{x} - y = 0 \cdots\cdots (2)$$

ضمن المعادلة (2) نحصل على :

$$y = 1 - e^{x} \cdots\cdots (3)$$

وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (1) نحصل على :

$$4 - x^{2} - (1 - e^{x})^{2} = 0$$

أو :

$$3 - x^{2} + 2e^{x} - e^{2x} = 0 \cdots\cdots (4)$$

وهذه المعادلة الاخيرة تحل باحدى الطرق السابقة لحل معادلة غير خطية .

المصفوفات

مقدمة :-

سنتناول في هذا الفصل بعض الطرق الاساسية المتبعة لحل مجموعة من المعادلات الخطية . وقبل الدخول في حل المعادلات الخطية يجب التعرف على شيء من جبر المصفوفات .

جبر المصفوفات :-

المقصود بالمصفوفة (Matrix) بأنها مجموعة من الارقام ليس بالشرط ان تكون قيمتها مهمة بل ان الاهمية تكمن في موقعها ضمن المصفوفة . وان اي مصفوفة تحدد بعدد اسطرها (Rows) واعمدتها (Columns) فيمكن ان يقال بأن المصفوفة ذات حجم ($n \times m$) حيث ان عدد السطور يساوي (n) وعدد الاعمدة يساوي (m) ويرمز لعناصر المصفوفة بالرمز (a_{ij}) حيث يشير (i) الى السطر و (j) الى العمود ، كما موضح ادناه :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad \text{و} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \cdots, n \\ j = 1, 2, 3, \cdots, m \end{matrix}$$

يمكن وضع المعادلات الآنية عندما يُراد حلها الى شكل مصفوفة يتم على ضوئها ايجاد قيم المجاهيل ولأجل الولوج في موضوع التعامل بالمصفوفات يجب التعرف مسبقاً على بعض خواص المصفوفة.

1- مقلوب المصفوفة :

يُعرف مقلوب المصفوفة كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فاذا كان حجم المصفوفة (A) تساوي ($P \times Q$) فان حجم مقلوبها (A^T) هو ($Q \times P$) ، او بمعنى آخر :

$$A^T(i,j) = A(j,i)$$

2- جمع وطرح المصفوفات :

يتم جمع او طرح اي مصفوفة مع اخرى بشرط ان يكون حجم المصفوفتين متساويين اذ يتم جمع او طرح نظائر كل عنصر وكما يلي :

$$A(i,j) + B(i,j) = (A+B)(i,j)$$
$$A(i,j) - B(i,j) = (A-B)(i,j)$$

وكما في الآتي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \therefore A+B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفات :

عند ضرب المصفوفات ببعضها يجب التأكد من خواص معينة فاذا كان حاصل ضرب المصفوفتين هو المصفوفة (C) يجب ان يكون حجم المصفوفتين (A و B) كالآتي :

$A = P\times R$ و $B = R\times Q$

لكي يكون حاصل الضرب (C) إذن : $C = P\times Q$

بحيث يكون كل عنصر في (C) هو :

$$C(i,j) = \sum_{K=1}^{R} A(i,k)\times B(k,j)$$

لتكن (A) ذات حجم (2X3) :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

وان (B) ذات حجم (3X2) :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

فأن (C) ستكون ذات حجم (2X2) :

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$$

ولضرب اكثر من مصفوفتين:

$A = P\times R$ ؛ $B = R\times K$ و $C = K\times Q$

حيث ان : $D = A\times B\times C$

وهذا يعطي : $D = P\times Q$

4- المحددات :

المحددة (Determinant) يرمز لها بالنسبة للمصفوفة A ‏($\det A$) او $|A|$ وهي رقم ناتج عن حاصل ضرب عناصر القطر الصغير مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الاعظم وكما في الآتي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det A = (3)(4) - (-1)(2) = 14$$

وتعتبر المحددة كمؤشر لبيان كون ان مجموعة المعادلات الخطية هي قابلة للحل متى ما كانت هناك قيمة للمحددة ، فان كانت القيمة صفراً فأن هذه المصفوفة

ليس لها مقلوب اي لا يوجد حل لهذه المعادلات اذن يمكن القول بأنه لا يمكن الوصول في حل المعادلات ما لم يتم التأكد من وجود قيمة لمحددة المعادلات الآنية .

ان الصيغة العامة التي يمكن اتباعها لايجاد محددة مجاميع المعادلات الآنية هي الوصول الى احتساب المحددة ذات الحجم (2X2) مع الاخذ بنظر الاعتبار التناسب بالاشارة واخذ قيمة العنصر عند العمود المعني . وتوجد طرق لاحتساب المحددة ذات الحجم الاكبر من (2X2) .

5- معكوس المصفوفات :

اذا كانت مجموعة المعادلات المعنية متمثلة بالمصفوفة الآتية : $AX = Y$

فان مجموعة المجاهيل (X) للمعادلات الآنية يمكن ايجادها هكذا : $X = A^{-1}Y$

حيث ان المصفوفة (A^{-1}) هو معكوس (A) وهناك عدة طرق لايجاد المعكوس . والطريقة العامة لاحتساب المعكوس هي :

$$A^{-1} = \frac{\text{حدود المصفوفة} \times \text{محدداتها المرافقة}}{\text{محددة المصفوفة}}$$

تعتبر هذه الطريقة طويلة عند تطبيقها على الحاسبة لذا يمكن الاستعانة بالطريقة التالية لاحتساب (A^{-1}) ، تتمثل هذه الطريقة بضرب المصفوفة (A) بمصفوفة الوحدة ومن ثم اجراء التحويلات بحيث تصبح (A) مصفوفة وحدة وان مصفوفة الوحدة تصبح (A^{-1}) ولعمل ذلك توضع مصفوفة الوحدة بجنب (A) ومن ثم تجرى عمليات الحذف لگاوس حتى تصبح (A) مصفوفة الوحدة لان حاصل ضرب اي صف من المصفوفة بقيمة ثابتة او طرح او جمع اي صفين مختلفين لن يكون له اي تأثير على حاصل العمليات .

بعض المصفوفات الخاصة :

أ- المصفوفة المربعة : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ او $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Leftarrow$ عدد الاعمدة = عدد الاسطر

ب- المصفوفة القطرية او الوترية : $\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$

ج- مصفوفة الواحدة او الوحدة : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

د- المصفوفة المثلثية :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا   مصفوفة مثلثية سفلى

حل المعادلات الجبرية الآنية الخطية

(Solution of Linear Simultaneous Algebraic Equations)

ان حل المعادلات الخطية يعني ايجاد قيم المجاهيل التي تحقق جميع معادلات تلك المنظومة ويعتمد الحل بشكل اساسي على عدد المجاهيل . وسوف يكون الحل هنا للمعادلات التي يكون عددها مساوياً لعدد المجاهيل فيها ، اي انه يوجد حل وحيد لنظام المعادلات الخطية عندما يكون غير معتل (Non-Singular) .

فاذا كانت المجاهيل تشكل مصفوفة غير منفردة ومن المرتبة (n x n) والمحددة لها لا تساوي صفر اي ($\det A \neq 0$) ، فان هنالك طرق عديدة للحل وتقسم عموماً الى نوعين الطرق المباشرة والطرق غير المباشرة (الطرق التكرارية) . حيث اننا سنتناول ثلاث طرق من الطرق المباشرة وطريقتين من الطرق غير المباشرة .

الطرق المباشرة : (Direct Methods .)

وهي :

١- الحل باستخدام المعكوس (Using Inverses)

وهذه الطريقة تتلخص في ايجاد معكوس المصفوفة ومن ثم ايجاد المجاهيل من حاصل ضرب المعكوس في الثوابت ، اي ان :

$$AX = B$$
$$X = A^{-1} B$$

وقد تم التطرق بالتفصيل لهذه الطريقة في (5) سابقاً .

EX. ①:- Use the matrix inversion method to find the values of (X_1, X_2 & X_3) for the following set of linear algebraic equatio[ns]

$$3X_1 - 6X_2 + 7X_3 = 3$$
$$9X_1 \qquad\quad - 5X_3 = 3$$
$$5X_1 - 8X_2 + 6X_3 = -4$$

Sol:-

يمكننا كتابة مجموعة المعادلات الخطية في السؤال بالصيغة التالية :

$$\underset{\text{المعاملات}}{A}\ \underset{\text{المتغيرات}}{X} = \underset{\text{الثوابت}}{B} \Rightarrow \overset{\text{المعاملات}}{\begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{bmatrix}} \overset{\text{المتغيرات}}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}} = \overset{\text{الثوابت}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

حيث ان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 9 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

وبما ان محددة المصفوفة (A) تساوي (462) اذن يمكن ايجاد مقلوب لهذه المصفوفة وبالتالي يوجد حل لهذه المجموعة من المعادلات الخطية . يمكن وضع مصفوفة الوحدة بجانب (A) هكذا :

الخطوة الاولى:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & -6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow NewRow_1 = Row_1 / a_{11}$$

$$\text{السطر الاول الجديد} = \frac{\text{السطر الاول القديم}}{\text{قيمة } a_{11}\ (3)}$$

$$\therefore\ a_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = \frac{3}{3} = 1 \ \&\ a_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{-6}{3} = -2 \ \&\ a_{13} = \frac{7}{3} \ \&$$

$$a_{14} = \frac{1}{3} \ \&\ a_{15} = 0 \ \&\ a_{16} = 0$$ وبذلك ستكون المصفوفة الجديدة:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 7/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} NR2 = R2 - \overset{9/1}{a_{21}} \cdot R1 \\ NR3 = R3 - a_{31} \cdot R1 \end{array} \Rightarrow$$

الخطوة الثانية :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 2.33 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -26 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5.65 & -1.65 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad NR2 = R2 / a_{22} \quad (a_{22} = 18) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 2.33 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 2 & -5.65 & -1.65 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} NR1 = R1 - a_{12} \cdot R_2 \\ NR3 = R3 - a_{32} \cdot R_2 \end{array} \Rightarrow$$

الخطوة الثالثة :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2.55 & -0.01 & 0.12 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & -2.77 & -1.31 & -0.12 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad NR_3 = R_3 / a_{33} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -0.55 & -0.01 & 0.12 & 0 \\ 0 & 1 & -1.44 & -0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{13} \cdot R_3 \\ NR_2 = R_2 - a_{23} \cdot R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0 & 0 & 1 & 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{array}\right]$$

اصبحت (A) مصفوفة وحدة

ومصفوفة الوحدة اصبحت (A^{-1})

وبما ان ($AA^{-1} = I = A^{-1}A$) إذن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix}$$

ومن ثم :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.14 & -0.2 \\ 0.52 & 0.12 & -0.52 \\ 0.48 & 0.04 & -0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore X_1 = 0.26 \times 3 + 0.14 \times 3 + (-0.2) \times (-4) = \underline{2}$

$\& \quad X_2 = 0.52 \times 3 + 0.12 \times 3 + (-0.52) \times (-4) = \underline{4}$

$\& \quad X_3 = 0.48 \times 3 + 0.04 \times 3 + (-0.36) \times (-4) = \underline{3}$

ولتجنب حدوث حالة القسمة على صفر يُفضل وضع صفوف المصفوفة (A) بشكل بحيث تكون عناصر قطر المصفوفة حاوية على اكبر قيم مطلقة لعناصرها وكما موضح :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 \\ 5 & -8 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

2- طريقة الحذف لكاوس (Gauss-Elimination Method)

ان طريقة المعكوس (A^{-1}) تأخذ وقتاً كبيراً في الحاسبة ، لذا فأن هذه الطريقة سريعة وفعالة نوعاً ما وتعتمد على فكرة الحذف المتتالي للمجاهيل X_k حيث ان ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) في مجموعة المعادلات الخطية ، ويمكن توضيح هذا باعتماد مجموعة ذات ثلاث معادلات خطية وكما يلي :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1 \quad \text{----}(1)$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \quad \text{----}(2)$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3 \quad \text{----}(3)$$

ويمكن وضعها بشكل المصفوفة المتزايدة (Augmented Matrix) وكما يلي :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

وتتلخص الطريقة بتحويل المصفوفة الاعتيادية الى مصفوفة مثلثية عاليا (Upper Triangular Matrix) وذلك بالحذف الامامي (Forward Elimination) لمعاملات المجاهيل التي تقع تحت عناصر القطر الرئيس بشكل متتالي، بعدها تبدأ عملية عكسية او تعويض تراجعي (Back Substitution) لايجاد المجاهيل، وكما موضح في الترتيب التالي :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : b_3 \end{bmatrix} \Downarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & : b''_3 \end{bmatrix} \text{ الحذف الامامي } \Rightarrow \begin{aligned} X_3 &= b''_3 / a''_3 \\ X_2 &= (b'_2 - a'_{23} X_3)/a'_{22} \\ X_1 &= (b_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3)/a_{11} \end{aligned} \text{ التعويض التراجعي}$$

حيث ان الرمز (′) اعلى الحدود يشير الى تحويل واحد قد تم على ذلك الحد، اما (″) فيشير الى تحويلين وهكذا .

ولانجاز عملية الحذف الامامي يؤخذ الصف الثاني ويطرح منه الصف الاول مضروباً بـ (a_{21}/a_{11}) فتكون نتيجة الطرح :

$$New\,Row_2 = Row_2 - Row_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow a'_{21} = a_{21} - a_{11} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0$$ و

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$$ و $$a'_{23} = a_{23} - a_{13} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$$ و $$b'_2 = b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

ثم يؤخذ السطر الثالث ويطرح منه السطر الاول مضروباً بـ (a_{31}/a_{11}) فتكون نتيجة الطرح :

$$NR_3 = R_3 - R_1 \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} \Rightarrow a'_{31} = a_{31} - a_{11} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} = 0$$ و

$$a'_{32} = a_{32} - a_{12} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}$$ و $$a'_{33} = a_{33} - a_{13} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}$$ و $$b'_3 = b_3 - b_2 \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

وسيصبح النظام بعد الحذف اعلاه هكذا :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & : b'_3 \end{bmatrix}$$

ثم نبدأ بالحذف التالي بمحاولة تصفير (a'_{32}) وذلك بأخذ السطر الثالث ويطرح منه السطر الثاني مضروباً بـ (a'_{32}/a'_{22}) فتكون نتيجة الطرح :

$$NR_3 = R_3 - R_2 \cdot \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \Rightarrow a''_{32} = a'_{32} - a'_{22} \cdot \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$ و

$$a''_{33} = a'_{33} - a'_{23} \cdot \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$ و $$b''_3 = b'_3 - b'_2 \cdot \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

يتحول النظام عندئذ الى مصفوفة مثلثية عليا . ثم بعد ذلك تبدأ عملية التعويض التراجعي حيث يمكن ايجاد المجاهيل من المعادلة الثالثة فالثانية ثم الاولى تباعاً.

ملاحظة :-

توجد بعض الهفوات في طرق الحذف هذه منها التقسيم على صفر واخطاء التدوير والانظمة غير المنطقية والتي تسبب المشاكل والاخطاء في الحل ، لذلك فاننا سنفرض انه قد تم اجراء عمليات واساليب تحسين الحلول عليها ومن اساليب التحسين التمركز والتدريج.

Ex. ② :- Find the solution of the following set of simultaneous equations, using the Gauss-Elimination method. (4D)

$$2.37X_1 + 3.06X_2 - 4.28X_3 = 1.76$$
$$1.46X_1 - 0.78X_2 + 3.75X_3 = 4.69$$
$$-3.69X_1 + 5.13X_2 - 1.06X_3 = 5.74$$

So. :-

الخطوة الاولى :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2.37 & 3.06 & -4.28 & 1.76 \\ 1.46 & -0.78 & 3.75 & 4.69 \\ -3.69 & 5.13 & -1.06 & 5.74 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} NR_2 = R_2 - R_1 \cdot \frac{1.46}{2.37} \\ NR_3 = R_3 - R_1 \cdot \frac{-3.69}{2.37} \end{array} \Rightarrow$$

الخطوة الثانية :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2.37 & 3.06 & -4.28 & 1.76 \\ 0 & -2.6650 & 6.3865 & 3.6058 \\ 0 & 9.8944 & -5.6040 & 8.4803 \end{array}\right] \Rightarrow NR_3 = R_3 - R_2 \cdot \frac{9.8944}{-2.6650} \Rightarrow$$

$$0 - 0 * \frac{9.8944}{-2.6650} = \underline{\underline{0}}$$

$$9.8944 - \left(-2.6650 * \frac{9.8944}{-2.6650}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$-5.6040 - 6.3865 * \frac{9.8944}{-2.6650} = \underline{\underline{18.1072}}$$

$$8.4803 - 3.6058 * \frac{9.8944}{-2.6650} = \underline{21.8676}$$

الخطوة الاخيرة :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2.37 & 3.06 & -4.28 & 1.76 \\ 0 & -2.6650 & 6.3865 & 3.6058 \\ 0 & 0 & 18.1072 & 21.8676 \end{array}\right] \Rightarrow$$

وبالتعويض التراجعي نحصل على :

$$X_3 = \frac{21.8676}{18.1072} = \underline{1.2077} \quad \& \quad X_2 = (3.6058 - 6.3865 * 1.2077)/(-2.6650) = \underline{1.5412}$$

$$\& \quad X_1 = (1.76 - 3.06 * 1.5412 - (-4.28) * 1.2077)/2.37 = \underline{0.9337}$$

(5)

3- طريقة الحذف لكاوس-جوردن (Gauss-Jordan Elimination Method)

يتم في هذه الطريقة حذف جميع العناصر الواقعة فوق وتحت القطر الرئيسي والذي تتحول عناصره الى واحد. ويمكن تلخيص عملية الحذف كما في المخطط التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & b_3 \end{bmatrix} \Downarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & b_1^* \\ 0 & 1 & 0 & : & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & : & b_3^* \end{bmatrix} \text{الحذف بطريقة كاوس-جوردن} \Rightarrow \left.\begin{matrix} X_1 = b_1^* \\ X_2 = b_2^* \\ X_3 = b_3^* \end{matrix}\right\} \text{الحل}$$

Ex. ③:- Solve the following set of linear algebraic equations using the Gauss-Jordan method:

$$2X_1 - 4X_2 + 6X_3 = 5$$
$$X_1 + 3X_2 - 7X_3 = 2$$
$$7X_1 + 5X_2 + 9X_3 = 4$$

Sol.:-

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & : & 5 \\ 1 & 3 & -7 & : & 2 \\ 7 & 5 & 9 & : & 4 \end{bmatrix} R_1/2 \quad \underline{\underline{OR}} \quad NR_1 = R_1/a_{11} = R_1/2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 2.5 \\ 1 & 3 & -7 & : & 2 \\ 7 & 5 & 9 & : & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{matrix} \quad \underline{\underline{OR}} \quad \begin{matrix} NR_2 = R_2 - a_{21}R_1 = R_2 - 1 * R_1 \\ NR_3 = R_3 - a_{31}R_1 = R_3 - 7 * R_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 2.5 \\ 0 & 5 & -10 & : & -0.5 \\ 0 & 19 & -12 & : & -13.5 \end{bmatrix} R_2/5 \quad \underline{\underline{OR}} \quad NR_2 = R_2/a_{22} = R_2/5 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & : & 2.5 \\ 0 & 1 & -2 & : & -0.1 \\ 0 & 19 & -12 & : & -13.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + 2R_2 \\ R_3 - 19R_2 \end{matrix} \quad \underline{\underline{OR}} \quad \begin{matrix} NR_1 = R_1 - a_{12}R_2 = R_1 + 2R_2 \\ NR_3 = R_3 - a_{32}R_2 = R_3 - 19R_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2.3 \\ 0 & 1 & -2 & : & -0.1 \\ 0 & 0 & 26 & : & -11.6 \end{bmatrix} R_3/26 \quad \underline{\underline{OR}} \quad NR_3 = R_3/a_{33} = R_3/26 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2.3 \\ 0 & 1 & -2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.44 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_3 \\ R_2 + 2R_3 \\ \\ \end{array} \quad \underline{\underline{OR}} \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{13}R_3 = R_1 + R_3 \\ NR_2 = R_2 - a_{23}R_3 = R_2 + 2R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.85 \\ 0 & 1 & 0 & -0.99 \\ 0 & 0 & 1 & -0.45 \end{array}\right]$$

ومنها يكون الحل لمجموعة المعادلات الخطية هو :

$X_1 = 1.85$; $X_2 = -0.99$ & $X_3 = -0.45$

امثلة واسئلة

① Use the matrix inversion method to solve the set of Linear algebraic equations:

$$X_1 + 4X_2 = 10$$
$$2X_2 + 4X_3 = 12$$
$$X_1 - 9X_3 = -16$$

<u>Sol.:-</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1/a_{11} = R_1/1 = \underline{R_1} \\ NR_2 = R_2 - a_{21}R_1 = R_2 - 0 * R_1 = \underline{R_2} \\ NR_3 = R_3 - a_{31}R_1 = R_3 - 1 * R_1 = R_3 - R_1 \Rightarrow \end{array}$$

لن يختلف شيئ

لن يختلف شيئ ايضاً

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad NR_2 = R_2/a_{22} = R_2/2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{12}R_2 = R_1 - 4R_2 \\ NR_3 = R_3 - a_{32}R_2 = R_3 + 4R_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad NR_3 = R_3/a_{33} = R_3/(-1) = -R_3 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{13}R_3 = R_1 + 8R_3 \\ NR_2 = R_2 - a_{23}R_3 = R_2 - 2R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -18 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & -8 \\ -2 & 4.5 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -16 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = 9 * 10 + (-18) * 12 + (-8) * (-16) = 2 \\ X_2 = (-2) * 10 + 4.5 * 12 + 2 * (-16) = 2 \\ X_3 = 1 * 10 + (-2) * 12 + (-1) * (-16) = 2 \end{array}\right\}$$

(تحقق من المعادلة الاصلية)

بالتعويض تتحقق

② By using the Gauss-Elimination method, solve the following equations:

$$3X_1 - 0.1X_2 - 0.2X_3 = 7.85$$
$$0.1X_1 + 7X_2 - 0.3X_3 = -19.3$$
$$0.3X_1 - 0.2X_2 + 10X_3 = 71.4$$

Work to (4D)

Sol:-

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_2 = R_2 - R_1 \cdot \frac{0.1}{3} \\ NR_3 = R_3 - R_1 \cdot \frac{0.3}{3} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 & -19.5617 \\ 0 & -0.1900 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right] \quad NR_3 = R_3 - R_2 \cdot \frac{(-0.1900)}{7.0033} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 7.0033 & -0.2933 & -19.5617 \\ 0 & 0 & 10.0120 & 70.8280 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$0X_1 + 0X_2 + 10.012X_3 = 70.828 \Rightarrow X_3 = 7.0743 \ \&$$

$$0X_1 + 7.0033X_2 - 0.2933 * 7.0743 = -19.5617 \Rightarrow X_2 = -2.4969 \ \&$$

$$3X_1 - 0.1 * (-2.4969) - 0.2 * (7.0743) = 7.85 \Rightarrow X_1 = 3.0051$$

③ Solve the following linear equations using Gauss-Jordan method:

$$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 11$$
$$4X_1 + 4X_2 - 3X_3 = 17$$
$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 = -1$$

Sol:-

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 11 \\ 4 & 4 & -3 & 17 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad NR_1 = R_1 / a_{11} = R_1 / 2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1.5 & -0.5 & 5.5 \\ 4 & 4 & -3 & 17 \\ -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_2 = R_2 - a_{21} R_1 = R_2 - 4R_1 \\ NR_3 = R_3 - a_{31} R_1 = R_3 + 2R_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1.5 & -0.5 & 5.5 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right] \quad NR_2 = R_2/a_{22} = R_2/(-2) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1.5 & -0.5 & 5.5 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 6 & -2 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{12} R_2 = R_1 - 1.5 R_2 \\ NR_3 = R_3 - a_{32} R_2 = R_3 - 6 R_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1.25 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \quad NR_3 = R_3/a_{33} = R_3/(-5) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1.25 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} NR_1 = R_1 - a_{13} R_3 = R_1 + 1.25 R_3 \\ NR_2 = R_2 - a_{23} R_3 = R_2 - 0.5 R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \therefore X_1 = 3 \; ; \; X_2 = 2 \; ; \; X_3 = 1$$

(4) Try to solve all the examples and questions by using the other two methods, what will you found?

(5) Solve by using Gauss-Jordan method:

$$\begin{aligned} 4X_1 + 5X_2 - 6X_3 &= 28 \\ 2X_1 \qquad - 7X_3 &= 29 \\ -5X_1 - 8X_2 \qquad &= 71.4 \end{aligned}$$

($X_1 = -56.91$, $X_2 = 26.65$, $X_3 = -20.40$ = Ans.)

(6) Solve by using the three methods:

$$\begin{aligned} 5X_1 - 12X_2 + 2X_3 &= -33 \\ X_1 - 14X_2 \qquad &= -103 \\ X_1 - 3X_2 + 12X_3 &= 10 \end{aligned}$$

(1.86 8.25 12.47 = Ans.)

(7) Solve by using any method:

$$\begin{aligned} 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 &= 4 \\ -2X_1 + 4X_2 + 3X_3 &= 5 \\ 3X_1 + 2X_2 - 4X_3 &= 7 \end{aligned}$$

($X_1 = 0.34$ & $X_2 = 1.85$ & $X_3 = -0.58$ = Ans.)

الهفوات في طرق الحذف (Pitfalls of Elimination Methods)

يمكننا ايجاز الهفوات التي تنجم عن طرق الحذف بما يلي :

١- التقسيم على الصفر (Division by Zero)

يؤدي في بعض الاحيان تصفير عمود معين الى تصفير احد المعاملات القطرية التي ستعتمد في المرحلة القادمة وفي هذه الحالة تعطي الحاسبة خطأ القسمة على صفر، كما في المثال الآتي :

$$2X_2 + 3X_3 = 8$$
$$4X_1 + 6X_2 + 7X_3 = -3$$
$$2X_1 + X_2 + 6X_3 = 5$$

حيث نلاحظ ان $(a_{11} = 0)$ وبالتالي سيكون هنالك القسمة على صفر، هذه المشكلة يمكن ان تظهر ايضاً عندما تكون المعاملات قريبة جداً من الصفر، يمكن تجنب هذه المشكلة عن طريق التمركز الجزئي (Partial Pivoting) والتي سنتطرق اليها لاحقاً .

2- أخطاء التدوير (Round-Off Errors)

تظهر اهمية اخطاء التدوير عندما يكون هنالك حل لعدد كبير من المعادلات لكون ان كل نتيجة جديدة تعتمد على النتائج التي سبقتها و تبعاً لذلك فأن الخطأ الذي يظهر في المراحل المبكرة سوف ينتشر ويسبب أخطاء في الخطوات اللاحقة .

3- الانظمة غير المنطقية (Ill-Conditioned Systems)

في بعض النظم الخطية تؤدي تغيرات طفيفة في المدخلات الى تغيرات كبيرة في الحل فيقال لمثل هذه النظم أنها نظم غير منطقية (عليلة الشروط) ، بينما إذا أدت هذه التغيرات الطفيفة في المدخلات الى تغيرات طفيفة في الحل فيقال أن النظم منطقية (Well-Conditioned Systems) .

فمثلاً اذا كان لدينا النظام الخطي التالي :

$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$1.1X_1 + 2X_2 = 10.4$$

فأن الحل لهذا النظام هو : $X_1 = 4$ و $X_2 = 3$

بينما اذا تغير المعامل (a_{21}) تغيراً طفيفاً من (١.١) الى (١.٠٥) فان الحل يتغير تغيراً كبيراً فيصبح الحل :

$X_1 = 8$ و $X_2 = 1$

ان التفسير الهندسي لهذه الظاهرة هو ان الحل (X) يُمثل بنقطة تقاطع المستقيمين

مرتين بمعادلتي النظام وحيث ان المستقيمين في النظام المعتل متوازيان تقريباً فإن أي تغير طفيف في معادلة أي من المستقيمين سيؤدي الى تغير كبير في نقطة التقاطع / أي ستكون نقطة التقاطع الجديدة مختلفة تماماً عن النقطة القديمة وبعيدة عنها.

أساليب تحسين الحلول (Technique For Improving Solutions)

يمكن اعتماد الاساليب التالية لتقليل المشاكل التي نوقشت سابقاً:

1- التمركز (Pivoting):

يعتبر التمركز الوسيلة التي يمكن بواسطتها تجنب القسمة على صفر وتقليل تأثير اخطاء التدوير وذلك بتبديل ترتيب المعادلات. ان عملية تبديل ترتيب المعادلات تتم بالبحث عن اكبر قيمة مطلقة لمعامل المجهول الذي يراد حذفه من العمود الواقع تحت القطر الرئيسي وتبديل الاسطر بحيث نجعل تلك القيمة هي العنصر المحوري (Pivot Element) وتدعى هذه العملية بالتمركز الجزئي (Partial Pivoting) اما عملية اجراء التعديل اللازم في الصفوف والاعمدة للحصول على اكبر عنصر محوري تدعى بالتمركز التام (Complete Pivoting) وهذه العملية نادراً ما تستعمل لأن تبديل الاعمدة يؤدي الى تغير مواقع المجاهيل (X) وهذا غير ملائم للبرنامج الحاسبي.

2- التدريج (Scaling):

هو عملية اجراء تعديل معاملات مجموعة المعادلات الخطية وجعل قيمها غير متفاوتة حيث انه في بعض الاحيان تكون معاملات مجموعة المعادلات الخطية ذات مقادير متفاوتة نتيجة وجود علاقات من كميات مقاسة بوحدات مختلفة مثل مايكروفولت مع كيلوفولت أو (nano second versus years) حيث أن هذا يؤدي الى تكون معادلات ذات أرقام كبيرة وأخرى صغيرة، فعند ترتيب التمركز بدون تدريج عندها ربما تصبح الارقام على الوتر ذات قيم صغيرة بالمقارنة مع الارقام في سطورها وهذا بالتأكيد يولد أخطاء التدوير فمثلاً اذا كان لدينا النظام التالي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 \\ -1 & 3 & 100 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 102 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التمركز الجزئي نحصل على المجموعة المثلثية مع الاخذ بنظر الاعتبار مرتبتين لبيان حالة خطأ التدوير وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 100 & : & 105 \\ 0 & 3.66 & 133 & : & 137 \\ 0 & 0 & -82.6 & : & -82.7 \end{bmatrix}$$

وهذا يعطي قيم $X_3 = 0.94$ و $X_2 = 1.09$ و $X_1 = 1.00$ وبعد الترجيح أي بقسمة كل سطر على أكبر قيمة لمعاملاته نحصل على:

وباستخدام اسلوب الحذف مع التمركز الجزئي نحصل على المجموعة المثلثية:

$$\begin{bmatrix} 0.03 & 0.02 & 1.00 \\ -0.01 & 0.03 & 1.00 \\ 0.5 & 1.00 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.02 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.50 & 1.00 & -0.50 & : & 1.00 \\ 0 & 0.05 & 0.99 & : & 1.04 \\ 0 & 0 & -1.82 & : & -1.82 \end{bmatrix}$$

وهذه تعطي $X_1 = X_2 = X_3 = 1.00$

Ex. Use the Gauss-Elimination method with Parial pivoting to solve the following system of equations:

$$\begin{aligned} 2X_2 \qquad\quad + X_4 &= 0 \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 &= -2 \\ 4X_1 - 3X_2 \qquad\quad + X_4 &= -7 \\ 6X_1 + X_2 - 6X_3 - 5X_4 &= 6 \end{aligned}$$

Sol.:- يمكن ترتيب مجموعة المعادلات بصيغة مصفوفة متزايدة (Augmented Matrix) هكذا:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & : & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & : & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \end{bmatrix}$$

الخطوة الاولى:
نستبدل السطر الاول بالسطر الرابع لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & : & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & : & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

وباختزال العمود الاول:

$NR_2 = R_2 - R_1 \cdot 2/6$

$NR_3 = R_3 - R_1 \cdot 4/6 \Rightarrow$

$NR_4 = R_4 - R_1 \cdot 0/6$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & : & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية:
نستبدل السطر الثاني بالسطر الثالث لنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & : & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

نختزل العمود الثاني

باستخدام :

$NR_3 = R_3 - R_2 \cdot 1.6667/-3.6667$

$NR_4 = R_4 - R_2 \cdot 2/-3.6667$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & : & -9.0001 \\ 0 & 0 & 2.1818 & 3.3666 & : & -5.9999 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة :

نختزل العمود الثالث

باستخدام : $NR_4 = R_4 - R_3 \cdot \frac{2.1818}{6.8182}$ لنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & -6 & -5 & : & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & : & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & : & -9.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 & : & -3.1199 \end{bmatrix}$$

الخطوة الاخيرة :

باتباع اسلوب التعويض

التراجعي نحصل على قيم المجاهيل :

$X_1 = -5.0000$ & $X_2 = 1.0000$ &

$X_3 = 0.3333$ & $X_4 = -1.9999$

Q/ Solve the following set of linear equations by using Gauss-Elimination method:

A) $X_1 - 7X_2 + 2X_3 = -4$

$2X_1 + X_2 + 9X_3 = 12$

$8X_1 + X_2 - X_3 = 8$

(Ans. $X_1 \approx 1.000$ & $X_2 \approx 1.000$ & $X_3 \approx 1.000$)

B) $1.48X_1 + 0.93X_2 - 1.30X_3 = 1.03$

$2.51X_1 + 1.48X_2 + 4.53X_3 = 0.05$

$2.68X_1 + 3.04X_2 - 1.48X_3 = -0.53$

(Ans. $X_1 = 1.45310$ & $X_2 = -1.58919$ & $X_3 = -0.27489$)

[illegible] معادلات خطية عدة بنفس الطريقة بحيث يعزل المجهول
الاول من المعادلة الاولى والمجهول الثاني من المعادلة الثانية وهكذا وكما يلي .

$$X_1^{r+1} = (b_1 - a_{12} X_2^{r} - a_{13} X_3^{r}) / a_{11}$$

$$X_2^{r+1} = (b_2 - a_{21} X_1^{r} - a_{23} X_3^{r}) / a_{22}$$

$$X_3^{r+1} = (b_3 - a_{31} X_1^{r} - a_{32} X_2^{r}) / a_{33}$$

حيث أن ($r = 0, 1, 2, \ldots$) وأن ($r+1$) يمثل القيمة الجديدة المحسوبة توا
وان (r) يمثل القيمة القديمة .

فنبدأ بالقيم الابتدائية (0, 0, 0) = $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)})$
ونحسب $(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)})$ وهذه القيم الجديدة المحسوبة تستعمل
كقيم ابتدائية لحساب $(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, X_3^{(2)})$ وهكذا .

ويستمر الحل التكراري حتى يكون تتساوى القيم الجديدة مع القيم القديمة أو
حتى يكون $(X_1^{r+1} - X_1^{r})$ و $(X_2^{r+1} - X_2^{r})$ و $(X_3^{r+1} - X_3^{r})$ أقل أو يساوي
الى درجة الدقة المحددة في المطلوب .

وبصورة عامة ولمجموعة ($n \times n$) من المعادلات يمكن التعبير عنها بالشكل التالي :

$$X_i^{r+1} = \frac{1}{a_{ij}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \cdot X_j^{r} \right] \quad ; \quad X^{r+1} = B - (L + U) \cdot X^{r}$$

(على شكل مصفوفة)

حيث ان : (B) هي مصفوفة الثوابت ($B_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$)

Ex. 1 :- Solve the following set of linear equations using Jacob's method:

باستخدام طريقة جاكوب التكرارية

$$8X_1 + X_2 - X_3 = 8$$

$$X_1 - 7X_2 + 2X_3 = -4$$

$$2X_1 + X_2 + 9X_3 = 12$$

Sol. :-

يمكن وضع المعادلات بالصيغة التكرارية التالية :

$$X_1^{r+1} = 1 - 0.125 X_2^{r} + 0.125 X_3^{r}$$

$$X_2^{r+1} = 0.571 + 0.143 X_1^{r} + 0.286 X_3^{r}$$

$$X_3^{r+1} = 1.333 - 0.222 X_1^{r} - 0.111 X_2^{r}$$

الطرق غير المباشرة (الطرق التكرارية) :- (Indirect Methods)

لكون ان طرق الحذف التي تم التطرق اليها سابقاً تستعمل لعدد محدد من المعادلات الخطية وبسبب اخطاء التدوير الناتجة فانها في بعض الحالات تكون غير كفوءة للأنظمة الخطية الكبيرة، لذا فان الطرق التكرارية يمكن ان تستعمل وتكون ذات فائدة أكبر في تقليل اخطاء التدوير لوصولها الى الحل بعدد مرات تكرارية أقل وبالتالي كلفة حاسوبية أقل. في بعض الاحيان يكون الاقتراب في الطرق التكرارية بطيء جداً وأحياناً اخرى لا نقترب، لذا فان الشرط الذي يحقق الاقتراب ويزيد من سرعته يكون إذا تحققت المتباينة التالية :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

وهذا يعني ان القيمة المطلقة لكل عنصر قطري في كل صف من صفوف المصفوفة اكبر من مجموع القيم المطلقة لعناصر ذلك الصف. هذه الحالة تدعى بالهيمنة القطرية (Diagonally Dominant). ويمكن ان نرى ذلك في المثال التالي لنظام من المعادلات:

$$\begin{aligned} 2X - 10Y + Z + 154 &= 0 \\ 10X - 2Y - 3Z - 205 &= 0 \\ 2X + Y - 10Z + 120 &= 0 \end{aligned}$$

فاذا أبدلنا المعادلتين الاوليتين نحصل على :

$$\begin{aligned} 10X - 2Y - 3Z - 205 &= 0 \\ 2X - 10Y + Z + 154 &= 0 \\ 2X + Y - 10Z + 120 &= 0 \end{aligned}$$

وهنا يمكن الملاحظة بأن شرط الهيمنة القطرية قد تحقق.

إن من اهم الطرق التكرارية التي سنتطرق اليها هي :

أ- طريقة جاكوب (Jacob's method) :

تعتبر هذه الطريقة من أول الطرق التي استخدمت لايجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكن قلما تستعمل لأنها طريقة بطيئة للوصول الى الحل الصحيح، ويمكن توضيحها كما يلي :

لتكن لدينا ثلاث معادلات :

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 &= b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 &= b_2 \\ a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 &= b_3 \end{aligned}$$

وبافتراض أن ($X_1^0 = X_2^0 = X_3^0 = 0$) كقيم ابتدائية يمكن احتساب القيم الجديدة للقيم ($r = 1, 2, 3, \dots$) كما مبين في الجدول الآتي :

r	X_1	X_2	X_3
0	0	0	0
1	1	0.571	1.333
2	1.095	1.095	1.048
3	0.994	1.027	0.969
4	0.993	0.990	0.998
5	1.001	0.998	1.003
6	1.001	0.999	1.000
7	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000

يمكن ملاحظة أن حالة التقارب قد تمت للمجاهيل الثلاثة .

يمكن وضع المعادلات السابقة على شكل مصفوفة وكما يلي :

$$X^{r+1} = B-(L+U)\cdot X^r$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{r+1} \\ X_2^{r+1} \\ X_3^{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.57 \\ 1.333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.125 & 0.125 \\ 0.143 & 0 & 0.286 \\ -0.222 & 0.111 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^r \\ X_2^r \\ X_3^r \end{bmatrix}$$

ب- طريقة كاوس - سيدل (Gauss-Seidel Method) :

تعتبر هذه الطريقة أسرع من طريقة جاكوب بسبب احتواء الطرف الايمن (R.H.S.) على X^{r+1} في المعادلة الثانية والثالثة --- الخ . ويمكن توضيحها كما يلي :

ليكن لدينا ثلاث معادلات :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

فيمكن إعادة صياغة المعادلات الخطية هذه مع وضع الاسلوب التكراري للطريقة وبالشكل التالي :

$$X_1^{r+1} = (b_1 - a_{12}X_2^r - a_{13}X_3^r)/a_{11}$$

$$X_2^{r+1} = (b_2 - a_{21}X_1^{r+1} - a_{23}X_3^r)/a_{22}$$

$$X_3^{r+1} = (b_3 - a_{31}X_1^{r+1} - a_{32}X_2^{r+1})/a_{33}$$

حيث أن :
$r = 0, 1, 2, 3, \dots$

وبصورة عامة ولمجموعة ($n \times n$) يمكن الحل بالشكل التالي :

$$X_i^{r+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot X_j^{r+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot X_j^r\right]$$

حيث ان (B) هي مصفوفة الثوابت ($B_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$)

$$X^{r+1} = B - LX^{r+1} - UX^r$$

(على شكل مصفوفة)

Ex. 2 :- Solve the following set of linear algebraic equations using the Gauss-Seidel method:

$$5X_1 - 2X_2 + X_3 = 4$$
$$X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 3$$
$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 17$$

باستخدام طريقة كاوس-سيدل يمكن حل المعادلات هذه للمجاهيل في قطر المجموعة .

So. :-

$$X_1 = 0.8 + 0.4X_2 - 0.2X_3 \quad \cdots (1)$$
$$X_2 = 0.75 - 0.25X_1 + 0.5X_3 \quad \cdots (2)$$
$$X_3 = 4.25 - 0.25X_1 - 0.5X_2 \quad \cdots (3)$$

وبافتراض قيم $X_2 = X_3 = 0$ يمكن حساب قيمة X_1 هكذا :

$$X_1 = 0.8 + 0 - 0 = 0.8$$

وباستخدام هذه القيمة المحسوبة تواً لـ X_1 يمكن التعويض بقيمة $X_3 = 0$ في المعادلة (2) لحساب X_2 :

$$X_2 = 0.75 - 0.25(0.8) + 0 = 0.55$$

إذن في العملية التكرارية الاولى يمكن التعويض لقيم X_1 و X_2 المحسوبتان تواً لايجاد قيمة X_3 هكذا :

$$X_3 = 4.25 - 0.25(0.8) - 0.5(0.55) = 3.775$$

ويمكن إتباع نفس الطريقة في الحساب لايجاد قيم المجاهيل في العملية التكرارية الثانية :

$$X_1 = 0.8 + 0.4(0.55) - 0.2(3.775) = 0.265$$
$$X_2 = 0.75 - 0.25(0.265) + 0.5(3.775) = 2.571$$
$$X_3 = 4.25 - (0.265) - 0.5(2.571) = 2.898$$

وهكذا للعمليات التكرارية الاخرى كما في الجدول الآتي :

r	X_1	X_2	X_3
1	0.8	0.55	3.775
2	0.265	2.571	2.898
3	1.249	1.887	2.994
4	0.956	2.008	3.007
5	1.002	2.003	2.998
6	1.001	1.999	3.000
7	1.000	2.000	3.000

وهكذا يمكن وضع المعادلات السابقة بصيغة مصفوفة وكما يلي :

$$X^{r+1} = B - U X^{r} - L X^{r+1}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{r+1} \\ X_2^{r+1} \\ X_3^{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.75 \\ 4.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{r} \\ X_2^{r} \\ X_3^{r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0 & 0 \\ 4.25 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{r+1} \\ X_2^{r+1} \\ X_3^{r+1} \end{bmatrix}$$

ويمكن توضيح الفرق بين طريقتي جاكوب وكاوس-سيدل في المثال التالي :

EX. 3 :- Solve the following set of linear equations using:

a) Jacobi's method ; b) Gauss-Seidel method.

$$5X_1 + 2X_2 + X_3 = 12$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 15$$
$$X_1 + 2X_2 + 5X_3 = 20$$

يمكن ترتيب مجموعة المعادلات هذه بصيغة جاكوب وكاوس-سيدل كما يلي وباعتماد القيم الابتدائية : $X_1 = X_2 = X_3 = 0$

Sol.:-

a) Jacob's method

$$X_1^{r+1} = (12 - 2X_2^{r} - X_3^{r})/5$$
$$X_2^{r+1} = (15 - X_1^{r} - 2X_3^{r})/4$$
$$X_3 = (20 - X_1^{r} - 2X_2^{r})/5$$

b) Gauss-Seidel method

$$X_1^{r+1} = (12 - 2X_2^{r} - X_3^{r})/5$$
$$X_2^{r+1} = (15 - X_1^{r+1} - 2X_3^{r})/4$$
$$X_3^{r+1} = (20 - X_1^{r+1} - 2X_2^{r+1})/5$$

وبذلك يمكن تلخيص العمليات الحسابية والنتائج في الجدول الآتي :

r	Jacob Method			Gauss-Seidel Method		
	X_1	X_2	X_3	X_1	X_2	X_3
1	2.40	3.75	4.00	2.4	3.1	2.3
2	0.10	1.15	2.02	0.7	2.4	2.9
3	1.54	2.72	3.52	0.86	2.08	3.00
4	0.71	1.17	2.60	0.97	2.10	3.00
5	1.41	2.29	3.41	0.996	2.00	3.00
6	0.80	1.69	3.20			
7	1.08	1.95	3.16			

إن القيم الحقيقية هي $X_1 = 1$ و $X_2 = 2$ و $X_3 = 3$

يمكن بملاحظة الفرق في عدد الخطوات بطريقة كاوس-سيدل جلياً بالمقارنة مع طريقة جاكوب.

H.W.

1. حل جميع الاسئلة الخاصة بالطرق المباشرة .

2. حل جميع الامثلة والاسئلة الخاصة بالطرق المباشرة والمحلولة بأحدى الطرق الثلاث حاول حلها بالطريقتين الأخريتين .

3. حل باقي الاسئلة في الصفحة الثانية من الورقة رقم (8) .

4. بالنسبة للطرق الغير مباشرة (الطرق التكرارية) وهي طريقتين حل الامثلة المحلولة بأحداها بالطريقة الاخرى .

5. حل جميع الاسئلة والامثلة والمحلولة بالطرق المباشرة مستخدماً الطرق الغير مباشرة ، ثم حل الاسئلة والامثلة المحلولة بالطرق الغير مباشرة مستخدماً الطرق المباشرة .

6. Solve :

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 + 8X_3 &= 4 \\ X_1 + 4X_2 + 3X_3 &= -2 \\ X_1 + 3X_2 + 4X_3 &= 1 \end{aligned}$$

(Ans. $X_1 = 4.75$ & $X_2 = -2.25$ & $X_3 = 0.75$)

7. Solve :

$$\begin{aligned} 10X_1 + X_2 + X_3 &= 12 \\ X_1 + 10X_2 + X_3 &= 12 \\ X_1 + X_2 + 10X_3 &= 12 \end{aligned}$$

(Ans. $X_1 = 1.0000$ & $X_2 = 1.0000$ & $X_3 = 1.0000$)

8. Solve:

$$\begin{aligned} 3\alpha - 0.1\beta - 0.2\gamma &= 7.85 \\ 0.1\alpha + 7\beta - 0.3\gamma &= -19.3 \\ 0.3\alpha - 0.2\beta + 10\gamma &= 71.4 \end{aligned}$$

(Ans. $\alpha = 3.00000$ & $\beta = -2.50001$ & $\gamma = 7.00003$)

تحويلات لابلاس (Laplace Transformations)

تعتبر تحويلات لابلاس طريقة مهمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية والمسائل ذات القيم الحدودية والقيم الابتدائية التي تظهر في الكثير من التطبيقات الهندسية ، حيث يتم تحويل المعادلة التفاضلية الاعتيادية الى معادلة جبرية والتي ستكون اسهل للحل . وباستعمال تحويل لابلاس نتمكن من توفير الكثير من الوقت والجهد عند حل المعادلات وذلك لتوفر جداول خاصة بتحويل لابلاس باستطاعتنا استعمالها . بالاضافة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية يمكننا استعمال طريقة تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ايضاً .

ويمكن اجمال فوائد تحويلات لابلاس كما يلي :

1- حل المعادلات الجبرية بدلاً من المعادلات التفاضلية .

2- ايجاد الحل مباشرةً دون اللجوء الى الحل العام ومن ثم تطبيق القيم الحدودية أو الابتدائية .

3- يمكن الحصول على الحل للمعادلات التي تكون غير متجانسة (Non-Homogeneous) مباشرةً دون حل الجزء المتجانس أولاً كما هو معتاد .

4- تمكننا من التعامل مع الحالات التي تكون فيها الدالة متقطعة الاستمرارية (Picewise Continuous) .

⊛ تعريف تحويلات لابلاس (Definition of Laplace Transforms)

نفرض ان الدالة $f(t)$ معرفة لجميع قيم $t>0$ فيكون التكامل $\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t)\,dt$ اذا كان موجوداً - أي الدالة $f(t)$ مستمرة والغاية $\lim_{t\to\infty} e^{-st}.f(t)$ محددة - يكون التكامل هو دالة لـ (S) ولتكن الدالة $F(s)$.

يُطلق على الدالة $F(s)$ تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ويرمز لها بالرمز $\mathcal{L}\{f(t)\}$ وكما يلي : $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}.f(t)\,dt$

حيث ان S يمثل وسيطاً حقيقياً أو مركباً . وبشكل عام وللحصول على تحويل لابلاس لأي دالة $f(t)$ نضرب الدالة بـ (e^{-st}) ونكامل من (0) الى (∞) ، هذه العملية تدعى تحويل لابلاس .

* تحويل لابلاس لبعض الدوال الاولية :(Laplace Transforms of Some Elementary Functions)

الحصانة

(1) $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}.1\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (s>0)$

(2) $\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty e^{-st}.t\,dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$

$= 0 + \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (s>0)$

(3) $\mathcal{L}(t^2) = \int_0^\infty e^{-st}.t^2 dt = \left[t^2\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (2t)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-st}}{-s^3}\right)\right]_0^\infty$

$= \left[\frac{-t^2}{s\,e^{st}} - \frac{2t}{s^2 e^{st}} - \frac{2}{s^3 e^{st}}\right]_0^\infty = \frac{2}{s^3} \quad (s>0)$

(4) $\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}t^n dt$

نضع $t = \frac{y}{s}$ و $dt = \frac{dy}{s}$

$\therefore \mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{y^n}{s^n}\cdot\frac{dt}{s} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad \text{if } (s>0)$

واذا كانت (n) عدد صحيح فإن :

$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

(5) $\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}.dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty$

$= \frac{1}{s-a} \quad (s>a)$

(6) $\mathcal{L}(\sin at) = \int_0^\infty e^{-st}\sin at.dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s.\sin at - a.\cos at)\right]_0^\infty$

$= \frac{a}{s^2+a^2}$

(7) $\mathcal{L}(\cos at) = \int_0^\infty e^{-st}\cos at.dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s.\cos at + a\sin at)\right]_0^\infty$

$= \frac{s}{s^2+a^2}$

ويمكن الحصول على (6) و(7) بطريقة أخرى بديلة وكما يلي :

[illegible] ما تم الحصول عليه في (5) فإن :

$$\mathcal{L}(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia}$$

أو :

$$\mathcal{L}(\cos at + i \sin at) = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

أو :

$$\mathcal{L}(\cos at) + i\,\mathcal{L}(\sin at) = \frac{s}{s^2+a^2} + i\,\frac{a}{s^2+a^2}$$

وبعد مقارنة الجزء الحقيقي و الخيالي نحصل على :

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \& \quad \mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

(8) $$\mathcal{L}(\sinh at) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

وباتباع نفس الاسلوب في (8) نحصل على :

(9) $$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

اذن نتائج تحويلات لابلاس للدوال السابقة يمكن اجمالها في الجدول التالي :

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$		

* بعض الخواص المهمة لتحويل لابلاس :

أولاً :- الخاصية الخطية (Linearity Property)

إذا كانت a و b ثوابت فإن :

$$\mathcal{L}[af(t)+b\phi(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[\phi(t)]$$

البرهان :-

$$\mathcal{L}[af(t)+b\phi(t)] = \int_0^\infty e^{-st}[af(t)+b\phi(t)]\,dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}\cdot \phi(t)\,dt$$

$$= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[\phi(t)]$$

Ex.①:- Find $\mathcal{L}[4t^3+7t-8+2e^{-5t}+10\sin 3t+5\cosh 2t]$

So.:-

بإستخدام الصيغة الخطية نحصل على :

$$\mathcal{L}[4t^3+7t-8+2e^{-5t}+10\sin 3t+5\cosh 2t]$$

$$=4\mathcal{L}[t^3]+7\mathcal{L}[t]-8\mathcal{L}[1]+2\mathcal{L}[e^{-5t}]+10\mathcal{L}[\sin 3t]+5\mathcal{L}[\cosh 2t]$$

$$= 4\cdot\frac{3!}{s^4}+7\cdot\frac{1}{s^2}-8\cdot\frac{1}{s}+2\cdot\frac{1}{s+5}+10\cdot\frac{3}{s^2+9}+5\cdot\frac{s}{s^2-4}$$

$$= \frac{24}{s^4}+\frac{7}{s^2}-\frac{8}{s}+\frac{2}{s+5}+\frac{30}{s^2+9}+\frac{5s}{s^2-4}$$

Ex.②:- Find the Laplace transforms of:

(i) $(2t^2-1)^2$ (ii) $\cos^3 t$ (iii) $\sinh^2 2t$ (iv) $\sin 3t\cdot\cos 4t$

So.:- (i) $\mathcal{L}[2t^2-1]^2 = \mathcal{L}[4t^4-4t^2+1] = 4\mathcal{L}[t^4]-4\mathcal{L}[t^2]+\mathcal{L}[1]$

$$= 4\cdot\frac{4!}{s^5}-4\cdot\frac{2!}{s^3}+\frac{1}{s} = \frac{1}{s^5}(96-8s^2+s^4)$$

(ii) $\mathcal{L}[\cos^3 t] = \mathcal{L}\left[\frac{\cos 3t+3\cos t}{4}\right] = \frac{1}{4}\mathcal{L}[\cos 3t]+\frac{3}{4}\mathcal{L}[\cos t]$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+1} = \frac{s^3+7s}{(s^2+9)(s^2+1)}$$

(iii) $\mathcal{L}[\sinh^2 2t] = \mathcal{L}\left[\frac{\cosh 4t - 1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\cosh 4t) - \mathcal{L}(1)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-16} - \frac{1}{s}\right] = \frac{8}{s(s^2-16)}$$

(iv) $\mathcal{L}[\sin 3t \cdot \cos 4t] = \mathcal{L}\left[\frac{\sin 7t - \sin t}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(\sin 7t) - \mathcal{L}(\sin t)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{7}{s^2+49} - \frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{3s^2-21}{(s^2+1)(s^2+49)}$$

ثانياً :- خاصية الازاحة الاولى (First Shifting Property)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن $\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$

البرهان :-

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

$$\therefore F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^\infty e^{at}\left[e^{-st} \cdot f(t)\right] dt = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}$$

وتبعاً لهذه الخاصية يمكن الحصول على النتائج التالية كما مبينة في الجدول :

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at} \sinh bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at} \cosh bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$		

Ex.3 :- Evaluate:

(i) $\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\}$ (ii) $\mathcal{L}\{e^{3t} \cdot \sin 4t\}$ (iii) $\mathcal{L}\{\cosh at \cdot \cos at\}$

Sol.:-

باستخدام خاصية الازاحة الاولى نحصل على :

(i) $\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot t^n\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

(ii) $\mathcal{L}\{e^{3t}.\sin 4t\} = \frac{4}{(s-3)^2+16} = \frac{4}{s^2-6s+25}$

(iii) $\mathcal{L}\{\cosh at.\cos at\} = \mathcal{L}\{(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2})\cos at\}$

$$= \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{e^{at}\cos at\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\cos at\}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{s+a}{(s+a)^2+a^2}] = \frac{s^3}{s^4+4a^2}$$

ثالثاً:- تحويل لابلاس للمشتقات (Laplace Transforms of Derivatives)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}f(t) - f(0) = sF(s) - f(0)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}.f'(t)dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}.f'(t)dt$$

ولتكن: $u = e^{-st}$ و $dv = f'(t)dt \Leftarrow du = -se^{-st}dt$ و $v = f(t)$

$$\therefore \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{k\to\infty}[e^{-st}.f(t)]_0^k + \lim_{k\to\infty}\int_0^k se^{-st}.f(t)\,dt$$

$$** \boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du} **$$

$$= [0 - f(0)] + \lim_{k\to\infty}[s\int_0^k f(t).e^{-st}dt]$$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] = s.F(s) - f(0)$$

وتبعاً لذلك يمكن الاستنتاج بأن:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

وكذلك فإن:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

وبصورة عامة:

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

رابعاً:- تحويل لابلاس للتكاملات (Laplace Transforms of Integrals)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

فإن:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\} = \frac{1}{s}F(s)$$

البرهان : نفرض أن : $\phi(t)=\int_0^t f(u)\,du$

$\therefore \phi'(t)=f(t)$ and $\phi'_{(0)}=0$ ---- (1)

والآن : $\mathcal{L}\{\phi'(t)\}=s\mathcal{L}\{\phi(t)\}-\phi_{(0)}$

أو وبعد التعويض بمعادلة (1) : $\mathcal{L}\{f(t)\}=s\mathcal{L}\{\phi(t)\} \Rightarrow$

$$F(s)=s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

خامساً :- الضرب في (t) (Multiplying by (t))

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن : $\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s)$

البرهان : عن طريق التعريف : $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt$

وبتفاضل الطرفين نسبةً الى (s) نحصل على :

$$\frac{d}{ds}F(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty -t\,e^{-st}f(t)\,dt=-\int_0^\infty e^{-st}\{t\cdot f(t)\}\,dt=-\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}=-\frac{d}{ds}F(s) \quad \& \quad \mathcal{L}\{t^2\cdot f(t)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$\& \quad \mathcal{L}\{t^3 f(t)\}=(-1)^3\frac{d^3}{ds^3}F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

سادساً :- القسمة على (t) (Dividing by (t))

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ فإن : $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(s)\,ds$

البرهان : عن طريق التعريف : $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$

وبتكامل الطرفين نسبةً الى (s) من $(s$ الى $\infty)$ نحصل على :

$$\int_s^\infty F(s)\,ds=\int_s^\infty\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right]ds \overset{\text{أو}}{=} \int_0^\infty\int_s^\infty e^{-st}f(t)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-st}}{-t}\right]_s^\infty f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\cdot\left[\frac{f(t)}{t}\right]dt=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}$$

Ex.④:- Evaluate: (i) $\mathcal{L}\{t.\cos at\}$ (ii) $\mathcal{L}\{t^2.\sin at\}$

Sol.:-

(i) $\mathcal{L}\{t.\cos at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{-(s^2+a^2)-s(2s)}{(s^2+a^2)^2} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(ii) $\mathcal{L}\{t^2.\sin at\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^4}$

Ex.⑤:- Evaluate: $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\}$

Sol.:-

نعرف أن :

$$\mathcal{L}\{e^{-at}-e^{-bt}\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

$$\therefore \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) ds$$

بعد تعويض الـ (∞) والـ (s) بدل (s)

$$= \left[\ln(s+a) - \ln(s+b)\right]_s^\infty = -\ln\frac{s+a}{s+b} = \ln\frac{s+b}{s+a}$$

⊛ تحويلات لابلاس المعكوسة : (Inverse Laplace Transforms)

إذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فإن $f(t)$ يطلق عليها معكوس تحويل لابلاس للدالة $F(s)$ ويمكن كتابة ذلك بالشكل : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ،

فمثلاً مادام $\mathcal{L}\{3t\} = \frac{3}{s^2}$ فإن: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2}\} = 3t$ وكذلك فإن: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-5}\} = e^{5t}$

وتبعاً لهذا المفهوم يمكن كتابة تحويلات لابلاس المعكوسة للدوال أدناه وكما يلي :

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $(n=1,2,\dots)$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}.\sinh at$
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}.\sin at$	$\frac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}.e^{at}.\sin bt$

توجد عدة طرق بسيطة لايجاد تحويلات لابلاس المعكوسة للدوال المعطاة . أهم هذه الطرق هي طريقة تجزئة الكسور (Method of Partial Fraction) ، حيث يتم تحليل الدالة الى كسور جزئية ومن ثم يتم اخذ التحويلات المعكوسة والتي تكون سهلة الحل .

Ex. ⑥ :- Find the inverse Laplace transforms of :

(i) $\dfrac{2S-11}{S^2-4S+8}$ (ii) $\dfrac{3S+7}{S^2+6S+9}$

So. :-

(i) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2S-11}{S^2-4S+8}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2S-11}{(S-2)^2+4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(S-2)-7}{(S-2)^2+4}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S-2}{(S-2)^2+2^2}\right\}-\frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(S-2)^2+2^2}\right\}$$

$$=2e^{2t}\cos 2t-\frac{7}{2}e^{2t}\sin 2t=\frac{e^{2t}}{2}(4\cos 2t-7\sin 2t)$$

(ii) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S+7}{S^2+6S+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S+7}{(S+3)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(S+3)-2}{(S+3)^2}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{S+3}\right\}-2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S+3)^2}\right\}$$

$$=3e^{-3t}-2e^{-3t}\cdot t=e^{-3t}(3-2t)$$

Ex. ⑦ :- Find the inverse of Laplace transforms of :

(i) $\dfrac{3S+7}{S^2-2S-3}$ (ii) $\dfrac{S}{(S+1)^2(S^2+1)}$

So. :-

(i) $$\frac{3S+7}{S^2-2S-3}=\frac{3S+7}{(S-3)(S+1)}=\frac{A}{S-3}+\frac{B}{S+1}$$

بعد ضرب كلا الطرفين في $(S-3)(S+1)$ نحصل على : $3S+7=(A+B)S+A-3B$

وبمساواة المعاملات $7=A-3B$ و $3=A+B$ ومن ثم الحل نحصل على :

$$\frac{3S+7}{S^2-2S-3}=\frac{4}{S-3}-\frac{1}{S+1} \Leftarrow (A=4) \text{ و } (B=-1)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3S+7}{S^2-2S-3}\right\}=4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S-3}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S+1}\right\}$$

$$=4e^{3t}-e^{-t}$$

(ii) $\dfrac{S}{(S+1)^2(S^2+1)} = \dfrac{A}{(S+1)^2} + \dfrac{B}{S+1} + \dfrac{CS+D}{S^2+1}$

وبضرب كلا الطرفين في $(S+1)^2(S^2+1)$ نحصل على :

$$S = A(S^2+1) + B(S+1)(S^2+1) + (CS+D)(S+1)^2$$

∴ ستكون المعاملات : $D = \frac{1}{2}$ ؛ $C = 0$ و $A = -\frac{1}{2}$ و $B = 0$ $\Leftarrow$

$$\frac{S}{(S+1)^2(S^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(S+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(S^2+1)}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S}{(S+1)^2(S^2+1)}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\sin t$$

* كما ويمكن الاستفادة من بعض الخواص لايجاد تحويلات لابلاس المعكوسة مثل الضرب في (t) (الاشتقاقات) والتكاملات ونظرية التوزيع وغيرها.

⊛ حل المعادلات التفاضلية بإستخدام تحويلات لابلاس :

(Solution of Differential Equations by Laplace Transformation)

يمكن حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وكذلك الجزئية بإستخدام تحويلات لابلاس . وهنا سيتم تناول المعادلات التفاضلية ذات المعادلات الثابتة فقط .

وتكون خطوات الحل كما يلي :

1- إستخدم تحويل لابلاس لطرفي المعادلة التفاضلية المعطاة .

2- إستخدم الشروط الابتدائية لتعطي بعد تبسيطها المعادلة الجبرية .

3- حل المعادلة الجبرية بحيث تحصل على (y) بدلالة (S) وتجعل الحل ليكون بالشكل : $\mathcal{L}(y) = Y = F(s)$

4- طبّق تحويل لابلاس المعكوس للطرفين في الخطوة الثالثة ليعطي : $y = f(t)$ وهو الحل المطلوب.

Ex. 8 :- Solve the equation:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad ; \quad y_{(0)} = 1 \quad , \quad y'_{(0)} = 1$$

Sol:-

المعادلة المعطاة يمكن أن توضع بالشكل الآتي:

$$y''-2y'+2y=0$$

وبعد أخذ تحويل لابلاس لكلا الطرفين:

$$\mathcal{L}(y'')-2\mathcal{L}(y')+2\mathcal{L}(y)=0$$

$$[s^2\mathcal{L}y-sy_{(0)}-y'_{(0)}]-2[s\mathcal{L}y-y_{(0)}]+2\mathcal{L}y=0$$

وبعد التعويض بالشروط الابتدائية:

$$s^2\mathcal{L}y-s-1-2s\mathcal{L}y+2+2\mathcal{L}y=0$$

$$(s^2-2s+2)\mathcal{L}y=s-1 \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}y=\frac{s-1}{s^2-2s+2}=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

وبعد أخذ معكوس لابلاس لكلا الطرفين:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}(y)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\}=y=e^{t}\cos t$$

Ex. 9:- Solve by Laplace transformation method the following:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-2y=3\cos 3t-11\sin 3t$$

given that $y_{(0)}=0$ and $y'_{(0)}=6$

Sol:-

بعد أخذ تحويل لابلاس لكلا الطرفين نحصل على:

$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y')-2\mathcal{L}(y)=3\mathcal{L}(\cos 3t)-11\mathcal{L}(\sin 3t)$$

$$[s^2\mathcal{L}(y)-sy_{(0)}-y'_{(0)}]+[s\mathcal{L}(y)-y_{(0)}]-2\mathcal{L}(y)=$$

$$3\cdot\frac{s}{s^2+9}-11\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

وبعد التعويض للشروط الابتدائية نحصل على:

$$\because \; s^2\mathcal{L}(y) - 6 + s\mathcal{L}(y) - 2\mathcal{L}(y) = \frac{3s-33}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$(s^2+s-2)\,\mathcal{L}(y) = \frac{3s-33}{s^2+9} + 6 = \frac{6s^2+3s+21}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{6s^2+3s+21}{(s^2+9)(s^2+s-2)} = \frac{3(2s^2+s+7)}{(s^2+9)(s^2+s-2)} = \frac{3(2s^2+s+7)}{(s^2+9)(s+2)(s-1)}$$

وبدلالة الكسر الجزئي :

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s^2+9}$$

ومن ثم أخذ معكوس لابلاس لكلا الطرفين :

$$\therefore \; y = e^{t} - e^{-2t} + \sin 3t$$

<u>Ex.10 :-</u> Solve the integral equation:

$$y + \int_0^t y\,dt = 1 - e^{-t}$$

<u>Sol :-</u>

$$\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}\left\{\int_0^t y\,dt\right\} = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(e^{-t})$$

$$\because \; \mathcal{L}\left\{\int_0^t y\,dt\right\} = \frac{\mathcal{L}(y)}{s} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(y) + \frac{\mathcal{L}(y)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathcal{L}y}{s}(s+1) = \frac{(s+1)-s}{s(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$y = t \cdot e^{-t}$$

حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية :- المتسلسلات

(Power Series Solutions of Differential Equations)

يمكن حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة (Constant Coefficients) بإستخدام الطرق الجبرية السابقة المتعارف عليها ، أما في حالة المعادلات ذات المعاملات المتغيرة (Variabl Coefficients) فإن الحالة تكون معقدة نوعاً ما ، كما هي الحالة في معادلة بسل (Bessel's Equation) ومعادلة لجندر (Legendr's Equation) والمعادلة الهندسية الفوقية (Hypergeometric Equation) وغيرها. وبما ان الحل لمثل هذه المعادلات مهم وذا فائدة كبيرة في التطبيقات الهندسية فإن الحلول المتاحة لمثل هذه المعادلات ستظهر على شكل متسلسلات قوى ولهذا السبب فإن طريقة الحل تدعى بطريقة متسلسلات القوى (Power Series Method) . إن أي دالة يمكن التعبير عنها بمتسلسلة غير محددة (Infinite Series) كما في ادناه :

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

أو :

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

وإن الصيغتين المعروفتين لتحويل أي دالة الى متسلسلة أو تعريف أي دالة بمتسلسلة هما :

١- متسلسلة تايلور (Taylor Series) : وتكون بالصيغة :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

حيث أن :

(c_0 و c_1 و c_2 و ---- و c_m): هي ثوابت .

x : متغير (Variable)

a : المركز (Center)

وأن :

$$c_0 = f(a) ; c_1 = f'(a) ; c_2 = \frac{f''(a)}{2!} ; c_3 = \frac{f'''(a)}{3!} ; \cdots\cdots$$

- متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series): وتكون بالصيغة :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n + \cdots$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \cdot x^m = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots$$

حيث أن :

$$c_0 = f(0) ; \; c_1 = f'(0) ; \; c_2 = \frac{f''(0)}{2!} ; \cdots$$

ومن الامثلة المؤلوفة لمتسلسلات القوى لماكلورين :

$$(1) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$(2) \quad e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$(3) \quad \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$(4) \quad \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$(5) \quad \ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

(*) طريقة متسلسلات القوى :

إن الفكرة الاساسية لطريقة متسلسلات القوى بسيطة وسوف نضع هذا الاسلوب لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى أو الثانية ، متجانسة ، خطية ذات معاملات متغيرة . حيث أن الشكل العام لها يكون :

$$P_0(x)\cdot \frac{dy}{dx} + P_1(x)\cdot y = Q(x) \quad \cdots\cdots (1)$$

&

$$P_0(x)\cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\cdot \frac{dy}{dx} + P_2(x)\cdot y = 0$$

أو :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}\cdot \frac{dy}{dx} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}\cdot y = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

ولإيجاد الحل لـ (1) و (2) اعلاه بإستخدام متسلسلات القوى ، فإن هناك

نوعان من الحل إعتماداً كون الحل يقع بالقرب من نقطة اعتيادية (Near Ordinary Point) أو بالقرب من نقطة منفردة (شاذة) (Near Singular Point) فإذا كانت $P_0(X_0)=0$ عند $(X=X_0)$ فإن الحل يعتبر بالقرب من النقطة الشاذة ، أما إذا كانت $P_0(X_0)\neq 0$ عند $(X=X_0)$ فإن الحل يعتبر بالقرب من النقطة الاعتيادية . وسوف نعتبر الحل هو حول $(X_0=0)$ ، حيث إن حلول حول نقاط أخرى للإنفرادية (Singularity) تكون ممكنة أيضاً .

يمكن القول إذن انه عندما يكون الحل بالقرب من النقطة الاعتيادية فإن أعلى مشتقة يجب أن تبقى وإلا فان الحل يكون بالقرب من نقطة شاذة وان الحل سوف يكون حول $(X_0=0)$.

وبذلك فإن الحل عندما يكون بالقرب من النقطة الاعتيادية فانه سيكون بالشكل :

$$\boxed{y_{(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m}$$

ومثال على ذلك المعادلات التالية :

$y'' = Xy$ نقطة اعتيادية عند $(X=0)$ (لاانفرادية)

معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الاولى $(X+1)y'-(X-2)y=0$

[نقطة اعتيادية عند $(X=0)$ (لاإنفرادية عند $(X=0)$]

معادلة هيرمت (Hermite Equation) $y''-3Xy'+3y$

[تمثل نقطة اعتيادية عند $(X=0)$ (لاانفرادية عند $(X=0)$]

أما عندما يكون الحل بالقرب من النقطة الشاذة فإنه سيكون بالشكل :

$$\boxed{y_{(x)} = X^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m X^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m X^{m+r}}$$

حيث ان (r) هو أس وقد يكون عدد موجب أو سالب أو كسر ويتم تحديده عن طريق حل المعادلة الرأسية (Indicial Equation) والتي سيتم الحصول عليها لاحقاً . ومثال على ذلك المعادلات التالية :

$2X^2y''+3Xy'-(1+X)y=0$ انفرادية عند $(X=0)$

$X^2y''+3Xy'-(1-X)y=0$ انفرادية عند $(X=0)$

$X^2y''+2Xy'-Xy=0$ انفرادية عند $(X=0)$

أولاً :- حل متسلسلات القوى بالقرب من النقطة الاعتيادية

(Power Series Solution Near Ordinary Point)

يمكن اجمال خطوات الحل باستخدام متسلسلات القوى بالقرب من النقطة الاعتيادية كما يلي :

الخطوة الاولى : نختار الحل الذي يكون بالشكل : $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^m$

ثم نشتق مرة أو مرتين حسب المعادلة التفاضلية المعطاة هكذا :

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m\, C_m X^{m-1}$$

$$\& \quad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, C_m X^{m-2}$$

بعدها نعوض (y و y' و y'') في المعادلة التفاضلية .

الخطوة الثانية : نفتح الحدود ونغير الاس (Shift Index) إذا كان من الضروري وذلك لجعله مشابه للحدود الاخرى .

الخطوة الثالثة : نعيد ترتيب الحدود ونجمع القوى المتشابهة لـ (X) ونساوي المعاملات لكل قوة لـ (X) الى الصفر مبتدئين بالحدود الثابتة ، ثم الحدود التي تحتوي على (X) ، ثم الحدود التي تحتوي على (X^2) ---- الخ ، ليعطي هذا علاقة التكرار (Recurrance Formula) والتي منها نعين المعاملات المجهولة بالتعاقب .

الخطوة الرابعة : نعوض قيم المعاملات التي استخرجت من الخطوة السابقة في الحل المفروض لنحصل على الحل النهائي للمعادلة التفاضلية المعطاة .

Ex. 1 :-

Solve in series $y'' = XY$

So.:-

سوف نتبع الخطوات أعلاه وذلك لأن الحل هنا يكون بالقرب من نقطة إعتيادية .

الخطوة الاولى: نكتب المعادلة التفاضلية بشكل متسلسلة:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\cdot C_m \cdot X^{m-2} = X \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^m$$

or

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\cdot C_m \cdot X^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^{m+1} = 0$$

الخطوة الثانية: نغير الاس للجانب الايسر ونفتحه للحصول على فترة عامة:

$$2C_2 + \sum_{m=0}^{\infty} (m+3)(m+2)\cdot C_{m+3} \cdot X^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^{m+1} = 0$$

الخطوة الثالثة: نغير الترتيب ونجمع معاملات الحدود لنفس القوة لـ(X):

$$2C_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \{(m+3)(m+2)\cdot C_{m+3} - C_m\}\cdot X^{m+1} = 0$$

اقل قوة لـ(X) يكون $(C_2=0)$ ولايجاد علاقة التكرار $(R.F.)$:

$$(m+3)(m+2)\cdot C_{m+3} - C_m = 0$$

$$\therefore \quad C_{m+3} = \frac{C_m}{(m+3)(m+2)}$$

حيث يطلق على هذه العلاقة بصيغة التكرار $(R.F.)$.

نلاحظ إن (C_0) سوف يحدد $(C_3$ و C_6 و ... الخ$)$، أما (C_1) فإنه سيحدد $(C_4$ و C_7 و ... الخ$)$. ونلاحظ ان $(C_2=0)$ أي ان $(C_5$ و C_8 و ... الخ$)$ جميعها تساوي صفر.

ولايجاد قيم المعاملات التي تكون بدلالة (C_0):

$$C_3 = \frac{C_0}{3*2} \text{ و } C_6 = \frac{C_3}{6*5} = \frac{C_0}{6*5*3*2} \cdots \text{etc.}$$

أما قيم المعاملات التي تكون بدلالة (C_1):

$$C_4 = \frac{C_1}{4*3} \text{ و } C_7 = \frac{C_4}{7*6} = \frac{C_1}{7*6*4*3} \cdots \text{etc.}$$

الخطوة الرابعة: نكتب الحل:

$$y_{(x)} = C_0 + C_1X + C_2X^2 + C_3X^3 + C_4X^4 + C_5X^5 + C_6X^6 + C_7X^7 + \cdots$$

$$= [C_0 + C_3X^3 + C_6X^6 + \cdots] + [C_1X + C_4X^4 + C_7X^7 + \cdots]$$

$$= C_0\left[1 + \frac{X^3}{3*2} + \frac{X^6}{6*5*4*3} + \cdots\right] + C_1\left[X + \frac{X^4}{4*3} + \frac{X^7}{7*6*4*3} + \cdots\right]$$

EX. (2):- Solve in series: $(2-X^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2X\frac{dy}{dx}-2y=0$

Sol.:-

الخطوة الاولى: لانه عند $(X=0)$ تعتبر نقطة اعتيادية فإننا سنستعمل الحل الذي يكون بالشكل :

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^m$$

نعوض كل من y و $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ في المعادلة المعطاة لنحصل على :

$$(2-X^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, C_m X^{m-2}+2X\sum_{m=1}^{\infty} m\, C_m X^{m-1}-2\sum_{m=0}^{\infty} C_m X^m=0$$

الخطوة الثانية: نغير الترتيب ونغير الاس ونفتح الحدود ثم نجمع الحدود المتشابهة لنحصل على :

$$2\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\, C_m X^{m-2}-\sum_{m=0}^{\infty}[m(m-1)-2m+2]\, C_m X^m=0$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty}[2(m+2)(m+1)C_{m+2}-(m^2-3m+2)C_m]\cdot X^m=0$$

الخطوة الثالثة: نساوي المعاملات الى الصفر وان المعامل (X^m) المساوي الى الصفر سوف يعطي علاقة التكرار وبالشكل التالي:

$$C_{m+2}=\frac{m^2-3m+2}{2(m+1)(m+2)}=\frac{(m-1)(m-2)}{2(m+1)(m+2)}$$

وهذه تعطي :

$$C_2=\frac{2C_0}{2*2*1}=\frac{C_0}{2}$$

$$\& \quad C_3=C_4=C_5=C_6=0$$

ويتبين إن جميع قيم المعاملات بعد (C_2) أصفاراً .

الخطوة الرابعة: كتابة الحل بالشكل :

$$y(x)=C_0+C_1X+C_2X^2$$

$$=C_0\left[1+\frac{X^2}{2}\right]+C_1X$$

ثانياً :- حل بمتسلسلات القوى بالقرب من النقطة الشاذة

(Power Series Solution Near Singular Point)

وتعرف هذه الطريقة بطريقة فروبينوس (Frobenius Method) وتكون خطوات الحل كما يلي :

الخطوة الاولى : الحل يكون بالشكل :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r}$$

ثم نشتق مرة أو مرتين حسب المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) \cdot C_m \cdot X^{m+r-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) \cdot C_m \cdot X^{m+r-2}$$

بعدها نعوض (y و y' و y'') في المعادلة التفاضلية .

الخطوة الثانية : نغير ترتيب الحدود بالنسبة لقوى (X) ونساوي معامل أقل قوة لـ (X) الى الصفر ليعطي هنا المعادلة الاسية (Indicial Equation) ، وبحل هذه المعادلة نحصل على جذرين هما (r_1 و r_2) يحددان الحل النهائي للمسألة حيث تظهر ثلاث حالات :

الحالة (1) : اذا كان ($r_1 - r_2 \neq 0$) وليس عدداً صحيحاً فيكون شكل الحل النهائي :

$$y_1 = X^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (r_1) X^m$$

$$y_2 = X^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m (r_2) X^m$$

الحالة (2) : إذا كان ($r_1 - r_2 = 0$) أو ($r_1 = r_2 = \alpha$) فيكون الشكل النهائي :

الحل الاول (y_1) كما في الحالة (1) ، أما الحل الثاني (y_2) فسيكون :

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r} (y_1)_{r=\alpha}$$

الحالة (3) : إذا كان ($r_1 - r_2 = N$) حيث أن N : عدد صحيح .

أي إذا كان الجذران مختلفين (r_1 و r_2) بحيث إن ($r_1 > r_2$) والفرق بينهما يساوي عدد صحيح فإن الحل الاول يكون كما في الحالة (1) $[(y_1)_{r=r_1}]$ ، أما الحل الثاني فيكون : $y_2 = \frac{\partial}{\partial r} \{ (r - r_2) y_1 \}_{r=r_2}$

الخطوة الثالثة: نساوي معاملات قوى (X) المختلفة الى الصفر لتحديد C_0 و C_1 و C_2 و ..... ، وان معامل أعلى قوة لـ (X) المساوي الى الصفر يُطلق عليه صيغة التكرار (Recurrence Formula) .

الخطوة الرابعة: نعوض قيم المعاملات C_0 و C_1 و C_2 و ..... في الحل المفروض ليعطي هذا الحل النهائي للمعادلة التفاضلية المعطاة ، وأخيراً نجمع الحلين :
$$((y = y_1 + y_2))$$

Ex. ③ :- Solve in Series : $4xy'' + 2y' + y = 0$

Sol. :- إن شكل الحل سيكون $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r}$ لأن $(X=0)$ هي نقطة مفردة.

الخطوة الاولى: نكتب المعادلة التفاضلية المعطاة بمتسلسلة :

$$4X \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) \cdot C_m \cdot X^{m+r-2} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) \cdot C_m \cdot X^{m+r-1} +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r} = 0$$

الخطوة الثانية:

$$\sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r)(m+r-1) \cdot C_m X^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r) \cdot C_m \cdot X^{m+r-1} +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^{m+r} = 0$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty} [4(m+r)(m+r-1) + 2(m+r)] \cdot C_m X^{m+r-1} +$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot X^{m+r} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1} \cdot X^{m+r-1} = 0$$

أو

$$[4r(r-1) + 2r] \cdot C_0 \cdot X^{r-1} +$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} [\{4(m+r)(m+r-1) + (m+r)\} \cdot C_m + C_{m-1}] \cdot X^{m+r-1} = 0$$

بمساواة اقل قوة لـ (X) وهي (X^{r-1}) يعطي المعادلة الاسية :

$$[4r(r-1) + 2r] \cdot C_0 = 0 \qquad \because \; C_0 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\therefore \; 4r(r-1) + 2r = 0$$

والتي تعطي :

$$r_1 = 0 \;\; و \;\; r_2 = \frac{1}{2} \;\; و \;\; r_1 - r_2 = -\frac{1}{2}$$

إذن الحالة هي رقم (1) .

الخطوة الثالثة: بمساواة معامل (x^{m+r-1}) بالصفر نحصل على صيغة التكرار (R.F.):

$$C_m = \frac{-C_{m-1}}{4(m+r)(m+r-\frac{1}{2})}$$

الخطوة الرابعة:

الحل الاول (y_1) يكون عندما ($r=0$):

$$C_m(r_1) = \frac{-C_{m-1}}{4m(m-\frac{1}{2})} = \frac{-C_{m-1}}{2m(2m-1)}$$

$$C_1 = \frac{-C_0}{2(1)} = \frac{-C_0}{2!}$$ عندما ($m=1$):

$$C_2 = \frac{-C_1}{4(3)} = \frac{C_0}{4!}$$ عندما ($m=2$):

$$C_3 = \frac{-C_2}{6(5)} = \frac{-C_0}{6!}$$ عندما ($m=3$):

$$C_4 = \frac{-C_3}{8(7)} = \frac{C_0}{8!}$$ عندما ($m=4$):

عندما (..... الخ) ، إذن الحل الاول يكون:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_1) \cdot x^m \quad ; \; r_1 = 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_1) \cdot x^m = C_0 - \frac{C_0}{2!}x + \frac{C_0}{4!}x^2 - \frac{C_0}{6!}x^3 + \cdots$$

$$= C_0 \left[1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots\right] = C_0 \cos\sqrt{x}$$

كما أن الحل الثاني (y_2) يكون عندما ($r_2 = \frac{1}{2}$) ، إذن علاقة التكرار تصبح:

$$C_m(r_2) = \frac{-C_{m-1}}{4(m+\frac{1}{2})(m)} = \frac{-C_{m-1}}{2m(2m+1)}$$

$$m=1 \Rightarrow C_1 = \frac{-C_0}{2(3)} = \frac{-C_0}{3!} \quad \& \quad m=2 \Rightarrow C_2 = \frac{-C_1}{4(5)} = \frac{C_0}{5!} \quad \&$$

$$m=3 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_2}{6(7)} = \frac{-C_0}{7!} \quad \& \quad m=4 \Rightarrow C_4 = \frac{-C_3}{8(9)} = \frac{C_0}{9!} \quad \& \cdots etc$$

إذن الحل الثاني يكون:

$$y_2 = x^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_2) \cdot x^m = x^{1/2}\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\right]$$

$$= x^{1/2} \cdot \left[C_0 - \frac{C_0}{3!}x + \frac{C_0}{5!}x^2 - \frac{C_0}{7!}x^3 + \cdots\right]$$

$$y_2 = C_0 \left[X^{1/2} - \frac{X^{3/2}}{3!} + \frac{X^{5/2}}{5!} - \frac{X^{7/2}}{7!} + \cdots \right]$$

$$= C_0 \sin\sqrt{X}$$

ويكون الحل العام النهائي :

$$y = y_1 + y_2 = C_0 \cos\sqrt{X} + C_0 \sin\sqrt{X}$$

$$= C_0 \left(\cos\sqrt{X} + \sin\sqrt{X} \right)$$

Ex. 4 :- Solve in series :

$$(X - X^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 5X)\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Sol. :-

يكون شكل الحل : $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r}$ لأن $(X=0)$ هي نقطة مفردة .

الخطوة الاولى : بعد ايجاد (y' و y'') نضعهما مع ال(y) في المعادلة التفاضلية المعطاة ونغير ترتيب الحدود لنحصل على :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)^2 C_m \cdot X^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+2)^2 \cdot C_m \cdot X^{m+r} = 0$$

الخطوة الثانية : نساوي معامل أقل قوة لـ (X) الى الصفر لنحصل على المعادلة الأسية :

$$C_0 \cdot r^2 = 0$$

والتي تعطي :

$$r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$$

ولأن كلا القيمتين متساوية $(r_1 = r_2)$ ، فإذن الحالة هي رقم (2) .

الخطوة الثالثة : نساوي معامل (X^{m+r}) الى الصفر فنحصل على

علاقة التكرار : $C_{m+1} = \frac{(m+r+2)^2}{(m+r+1)^2} \cdot C_m$

وهذه تعطي :

$$C_1 = \frac{(r+2)^2}{(r+1)^2} C_0 \quad \& \quad C_2 = \frac{(r+3)^3}{(r+2)^2} C_1 \quad \&$$

$$C_3 = \frac{(r+4)^2}{(r+3)^2} C_2 \quad \& \quad \cdots\cdots \text{ etc.}$$

الخطوة الرابعة :

إذن الحل الاول يكون :

$$y_1 = C_0 \cdot X^r \left[1 + \frac{(r+2)^2}{(r+1)^2} \cdot X + \frac{(r+3)^2}{(r+1)^2} \cdot X^2 + \frac{(r+4)^2}{(r+1)^2} \cdot X^3 + \cdots \right]$$

كما نعرف من الحل السابق عندما (r=0) وهذا يعطينا حلا واحد ولإيجاد الحل الثاني نقوم بما يلي: نعوض القيم في المعادلة التفاضلية المعطاة (كما تم سابقاً) ثم نبسط المعادلة:

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-5x)\frac{dy}{dx}-4y=0$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)^2\cdot C_m\cdot x^{m+r-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r+2)^2\cdot C_m\cdot x^{m+r}$$

$$=C_0\cdot r^2\cdot x^{r-1}-C_0(r+2)^2\cdot x^r+C_1(r+1)^2\cdot x^r-C_1(r+3)^2x^{r+1}$$

$$+C_2(r+2)^2\cdot x^{r+1}-C_2(r+4)^2\cdot x^{r+2}+C_3(r+3)^2\cdot x^{r+2}-$$

$$C_3(r+5)^2\cdot x^{r+3}+\cdots\cdots=\boxed{C_0\cdot r^2\, x^{r-1}}$$ (بعد التبسيط)

جميع الحدود الاخرى تساوي صفر حسب علاقة التكرار، والآن نفاضل طرفي المعادلة نسبة الى (r) فنحصل على:

$$(x-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)+(1-5x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)-4\frac{\partial y}{\partial r}=$$

$$C_0\left[2r x^{r-1}+x^{r-1}\cdot \ln x\cdot r^2\right]$$

إذا كانت (r=0) فإن الجانب الايمن يساوي صفر فإذن $\left(\frac{\partial y}{\partial r}\Big|_{r=0}\right)$ هي أيضاً حل للمعادلة، فإذن الحل الثاني يكون بتفاضل الحل الاول (y_1) نسبة الى (r) ومن ثم نضع (r=0) في المشتقة، كما يلي:

$$\frac{\partial y_1}{\partial r}=C_0\cdot x^r\cdot \ln x\left[1+\frac{(r+2)^2}{(r+1)^2}\cdot x+\frac{(r+3)^2}{(r+1)^2}\cdot x^2+\cdots\right]+$$

$$C_0\cdot x^r\left[\frac{(r+2)^2}{(r+1)^2}\cdot\left(\frac{2}{r+2}-\frac{2}{r+1}\right)\cdot x+\frac{(r+3)^2}{(r+1)^2}\cdot\left(\frac{2}{r+3}-\frac{2}{r+1}\right)\cdot x^2+\cdots\right]$$

$$\therefore\ y_1\Big|_{r=0}=C_0\left(1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+\cdots\right)$$

$$\&\quad \frac{\partial y_1}{\partial r}\Big|_{r=0}=C_0\ln x\left[1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\right]+$$

$$C_0\left[2^2(1-2)x+3^2\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{1}\right)x^2+\cdots\right]$$

إذن الحل العام يكون :

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\, y_1\big|_{r=0} + B\, \frac{\partial y_1}{\partial r}\Big|_{r=0}$$

Ex. 5 :- Solve in Series :

$$X(1-X)\frac{d^2y}{dX^2} - 3X\frac{dy}{dX} - y = 0$$

So. :-

بسبب $(X=0)$ نقطة مفردة فإن الحل يكون :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r}$$

الخطوة الاولى :

نعوض كلاً من $\left(y \text{ و } \frac{dy}{dX} \text{ و } \frac{d^2y}{dX^2}\right)$ في المعادلة المعطاة ونغير ترتيب الحدود بالنسبة لقوى (X) لنحصل على :

$$X(1-X)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)\,C_m X^{m+r-2} - 3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)\,C_m X^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m X^{m+r} = 0$$

أو

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)\,C_m X^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r+1)^2\,C_m X^{m+r} = 0$$

الخطوة الثانية :

نساوي المعاملات الى الصفر ، وان معامل أقل قوة لـ (X) يعطي المعادلة الاسية وكما يلي :

$$r(r-1)\,C_0 = 0$$

وهذا يعطي : $r = 0$ أو : $r = 1$

$$\therefore\ r_1 - r_2 = -1$$

إذن هنا تكون الحالة رقم (3) .

الخطوة الثالثة : نساوي معامل (X^{m+r}) الى الصفر فنحصل على :

$$C_{m+1} = \frac{(m+r+1)^2}{(m+r)(m+r+1)}\,C_m = \frac{m+r+1}{m+r}\,C_m$$

وهذا يعطي :

$$C_1 = \frac{r+1}{r} C_0 \quad \& \quad C_2 = \frac{r+2}{r+1} C_1 = \frac{r+2}{r} C_0 \quad \&$$

$$C_3 = \frac{r+3}{r+2} C_2 = \frac{r+3}{r} C_0 \quad \& \; \cdots\cdots \; etc.$$

<u>الخطوة الرابعة :</u>

الحل الاول يكون عندما $(r=1)$:

$$y_1 = C_0 X (1 + 2X + 3X^2 + \cdots)$$

وعندما تكون $(r=0)$ نجد أن المعاملات C_1 و C_2 و .... الخ جميعها غير محددة ، لذلك فإن الحل العام يكون :

$$y_r = C_0 X^r \left[1 + \frac{r+1}{r} X + \frac{r+2}{r} X^2 + \cdots\right]$$

ولإيجاد الحل الثاني وهو كما نعرف :

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r} \{(r - r_2) y_1\}_{r=r_2}$$

نضرب كلا الطرفين بـ $(r-0)$ ونفاضل نسبة الى (r) وهذا يعطي :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot y_r) = C_0 \cdot X^r \cdot \ln X \left[r + (r+1)X + (r+2)X^2 + \cdots\right] + C_0 \cdot X^r \left[1 + X + X^2 + \cdots\right]$$

وبوضع $(r=0)$ نحصل على الحل الثاني وكما يلي :

$$y_2 = C_0 \ln X (X + 2X^2 + 3X^3 + \cdots) + C_0 (1 + X + X^2 + \cdots)$$

إذن الحل العام يكون :

$$y = A y_1 + B y_2$$

<u>أسئلة</u>

Solve in Series :

1) $y'' - Xy' + X^2 y = 0$

2) $(1+X^2) y'' + Xy' - y = 0$

3) $2X(1-X) y'' + (1-X) y' + 3y = 0$

4) $y'' + X^2 y = 0$

5) $3Xy'' + 2y' + y = 0$

6) $y' = 2xy$

7) $(1+x)y' - (2x+y)y = 0$

8) $2(x^2+x^3)y'' - (x-3x^2)y' + y = 0$

9) $2x^2y'' - xy' + (1-x^2)y = 0$

10) $4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$

11) $y'' - xy' + y = 0$

12) $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

13) $(x+x^2+x^3)y'' + 3x^2y' - 2y = 0$

14) $x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0$

15) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$

16) $xy'' - y' + 4x^3y = 0$

17) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{3}{4x^2}y = y$

18) $18x^2y'' + 3x(x+5)y' - (10x+1)y = 0$

19) $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$

20) $3x^2y'' + (3x^2+5x)y' + 6xy = y$

21) $x^2y'' + 6xy' - (6-x^2)y = 0$

22) $y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$

23) $x(xy''+y') + x^2y - \frac{1}{4}y = 0$

24) $4x^2y'' - 4xy' + (3-4x^2)y = 0$

25) $y'' + \frac{1}{x}y' = \left(\frac{y}{4x^2}\right) - y$

26) $8x^2y'' + 10xy' + (x-1)y = 0$

انتهى بعون الله .

المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equations)

كما هو معروف فإن أي معادلة تحتوي على معاملات تفاضلية جزئية لدالة ذات متغيرين أو أكثر تسمى بالمعادلة التفاضلية الجزئية، وتظهر في العديد من الحالات الفيزياوية والهندسية مثل انتقال الحرارة خلال قضيب معدني واهتزاز الاسلاك والعتبات وغيرها. حيث تعتمد الدوال الموجودة في جميع هذه المسائل على متغيرين أو أكثر، كما ان رتبة هذه المعادلة تتحدد برتبة أعلى اشتقاق يظهر فيها، ويقال للمعادلة التفاضلية الجزئية بأنها خطية (Linear) إذا كان المتغير المعتمد واشتقاقه من الدرجة الاولى، وتكون متجانسة (Homogeneous) إذا كان كل حد من حدودها يحتوي إما المتغير المعتمد أو مشتقته، فالمعادلات التالية تصنف وكما يلي:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2 \quad \ldots \quad [\text{الرتبة الاولى، خطية، غير متجانسة}]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3 \quad \ldots \quad [\text{الرتبة الثانية، خطية، متجانسة}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \ldots \quad [\text{الرتبة الثانية، خطية، متجانسة}]$$

والمعادلات أدناه هي معادلات تفاضلية جزئية مهمة خطية ومن الرتبة الثانية ومتجانسة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \ldots \quad \text{معادلة موجة ذات بعد واحد}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \ldots \quad \text{معادلة انتقال حرارة ذات بعد واحد}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \ldots \quad \text{معادلة لابلاس ذات بعدين}$$

ان حل المعادلة التفاضلية الجزئية في منطقة (R-Domain) هو دالة تحتوي على معاملات تفاضلية جزئية تحقق المعادلة التفاضلية في كل نقطة من نقاط (R)، كما ان الحل العام لها يحتوي على ثوابت اختيارية أو دوال اختيارية أو كليهما. بينما الحل الوحيد (Unique Solution) للمعادلة التفاضلية الجزئية يجب أن يحقق اضافة الى المعادلات التفاضلية شروطاً أخرى هي الشروط الحدودية (Boundary Conditions) والشروط الابتدائية (Initial Conditions).

إن الطريقة المناسبة لحل هذه المسائل هي طريقة فصل المتغيرات وتسمى ايضاً بطريقة الضرب.

طريقة فصل المتغيرات (طريقة الضرب)

Method of Separation of Variables (Product Method)

إذا كان (z) يمثل متغير معتمد وكان (x,y) متغيرين غير معتمدين فإننا نستعمل الحل ليكون حاصل ضرب دالتين إحدى الدالتين هي دالة لـ (x) فقط وأخرى هي دالة لـ (y) فقط، وفي هذه الحالة فان حل المعادلة التفاضلية يتحول الى حل معادلتين تفاضليتين اعتياديتين، وكما في الامثلة التالية:

Ex. 1:- Solve $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ by the method of separation of variables.

Sol.:-

إجعل $z = X \cdot Y \; \ldots (1)$ هو حل للمعادلة التفاضلية حيث أن:

$X = X_{(x)}$ و $Y = Y_{(y)}$ وبتعويض المعادلة (1) في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على:

$$(X'' + 2X')Y + XY' = 0$$

وبعد فصل المتغيرين تصبح هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$\frac{X'' - 2X'}{X} = \frac{-Y'}{Y}$$

يتضح لنا بأن كلاً من $(X$ و $Y)$ أصبحا متغيرين مستقلين، وإذا حاولنا تغيير (Y) والاحتفاظ بالمتغير (X) ثابتاً نجد أن كل من الطرف الايمن وكذلك الايسر ثابتين، أي بمعنى آخر نجعل:

$$\frac{X'' - 2X'}{X} = \frac{-Y'}{Y} = k = \text{constant} \Rightarrow$$

$$X'' - 2X' - kX = 0 \ldots (2) \quad \& \quad Y' - kY = 0 \ldots (3)$$

نلاحظ ان المعادلتين (2) و (3) كلاهما معادلتين تفاضليتين اعتياديتين ولحل المعادلة (2) من خلال معرفتنا أن المعادلة $m^2 - 2m - k = 0$ هي معادلة مساعدة وان جذوريها هما:

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+k}$$

والآن نضع $\beta = 1 - \sqrt{1+k}$ و $\alpha = 1 + \sqrt{1+k}$

$$\therefore X = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \ldots (4)$$

ومن المعادلة (3) :

$$\frac{Y'}{Y} = -k \quad \text{or} \quad \ln Y = -ky + c \Rightarrow$$

$$Y = e^{-ky+c} = C_3 e^{-ky} \quad \ldots\ldots (5)$$

ومن المعادلتين (4) و (5) يكون الحل المطلوب كما يلي :

$$Z = X \cdot Y = (C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}) C_3 e^{-ky} = (A e^{\alpha x} + B e^{\beta x}) e^{-ky}$$

Ex. ②:- Using the method of separation of variables, solve: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u$ where $u(x,0) = 6e^{-3x}$

Sol.:-

نعتبر الحل هو $u = XT$ وبعد التعويض في المعادلة المعطاة نحصل على:

$$X' - (1+2k)X = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$T' - kT = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

من المعادلة (1) :

$$\frac{X'}{X} = 1+2k \Rightarrow \ln X = (1+2k)x + c' \Rightarrow$$

$$X = C_1 e^{(1+2k)x} \quad \ldots\ldots (3) \quad \text{where } (C_1 = e^{c'})$$

ومن المعادلة (2) :

$$\frac{T'}{T} = k \Rightarrow \ln T = kt + c'' \Rightarrow$$

$$T = C_2 e^{kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \quad \text{where } (C_2 = e^{c''})$$

وبعد دمج المعادلتين (3) و (4) نحصل على الحل العام هكذا:

$$u = X \cdot T = C_1 \cdot C_2 e^{(1+2k)x} \cdot e^{kt} = A e^{(1+2k)} \cdot e^{kt} \quad \ldots\ldots (5)$$

وبعد تعويض الشرط الابتدائي يكون:

$$u(x,0) = A e^{(1+2k)x}$$

But $u(x,0) = 6e^{-3x} \Rightarrow A e^{(1+2k)x} = 6e^{-3x}$

ومن ثم $(A = 6)$ والثابت $(k = -2)$. وبعد التعويض بقيم (k, A)

في المعادلة (5) يكون الحل العام المطلوب كما يلي:

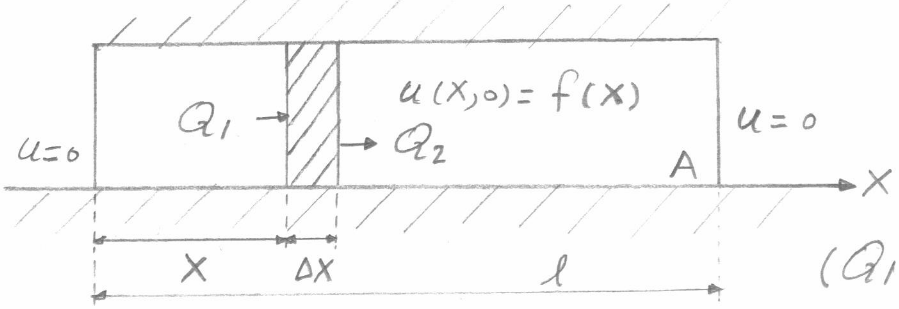
$$u = 6e^{-(3x+2t)}$$

سريان الحرارة ذو البعد الواحد

(One-Dimensional Heat Flow)

تظهر المعادلات التفاضلية الجزئية عادة كتفسير أو وصف رياضي للمسائل الفيزياوية والهندسية والتي تكون خاضعة لشروط أولية كما في انتقال الحرارة ذو البعد الواحد.
وسنحاول إيجاد المعادلة التفاضلية التي تصف انتقال الحرارة من المبادئ الأولية ومن ثم ايجاد الحل للمعادلة باستخدام طريقة فصل المتغيرات.

نفرض ان هناك قضيب متجانس ذي مقطع عرضي منتظم معزول من الجوانب لذا فان سريان الحرارة يكون في الاتجاه العمودي لمساحة المقطع كما مبين في الشكل:



ان كمية الحرارة التي تعبر المقطع عند مسافة (x) هي (Q_1) وتساوي:

$$Q_1=-KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

حيث ان (K) هو معامل التوصيل، (A) هي مساحة المقطع. وبصورة مشابهة (Q_2) هي كمية الحرارة التي تعبر المقطع عند مسافة $(x+\Delta x)$ تكون:

$$Q_2=-KA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

والفرق بينهما يكون:

$$Q_1-Q_2=KA\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] \quad \cdots (1)$$

ولكن الزيادة في الحرارة تكون:

$$\text{Rate of increase of heat}=S\rho A\Delta x\cdot\frac{\partial u}{\partial t} \quad \cdots (2)$$

حيث ان S = الحرارة النوعية و ρ = الكثافة للمعدن.

ومن (1) و (2) يكون:

$$S\rho A\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}=KA\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]$$

$$S\rho\frac{\partial u}{\partial t}=K\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]$$

وعندما تقترب (Δx) من الصفر $(\Delta x\to 0)$ يكون:

$$S\rho\frac{\partial u}{\partial t}=K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots (3)$$

وهذه هي معادلة سريان الحرارة ذات البعد الواحد، حيث أن: $c^2=\frac{K}{S\rho}$

والهدف الآن هو الحصول على الحل لهذه المعادلة بطريقة فصل المتغيرات
وبالخطوات التالية :

الخطوة الاولى :

نفرض ان : $u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)}$ وبالتعويض في معادلة (3)

نحصل على : $X T' = c^2 X'' T$ أو : $\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T'}{T} = a \cdots (4)$

وتبعاً للثابت (a) تظهر ثلاث حالات :

الحالة (1) :

عندما تكون $(a>0)$ نضع $a = k^2$ ، إذن العلاقة (4) تصبح :

$$\left.\begin{array}{l} X'' - k^2 X = 0 \\ T' - c^2 k^2 T = 0 \end{array}\right\} \cdots (5)$$

وبحل هاتين المعادلتين
نحصل على :

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx} \quad \& \quad T = C e^{c^2 k^2 t}$$

إذن الحل العام يكون :

$$u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)}$$
$$= (A e^{kx} + B e^{-kx}) \cdot C e^{c^2 k^2 t} = (A_1 e^{kx} + B_1 e^{-kx}) e^{c^2 k^2 t} \cdots (6)$$

الحالة (2) :

عندما تكون $(a=0)$ تصبح العلاقة (4) بالشكل : $X'' = 0 \ \& \ T' = 0$

والحل يكون : $X = Ax + B$ و $T = C$ والحل العام يكون :

$$u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)} = (Ax+B) \cdot C = A_1 x + B_1 \cdots (7)$$

الحالة (3) :

عندما تكون $(a<0)$ نضع $(a = -k^2)$ ، فالعلاقة (4) تعطي :

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \& \quad T' + c^2 k^2 T = 0$$

وبحلها نحصل على :

$$X = (A \cos kx + B \sin kx) \ \& \ T = C e^{-c^2 k^2 t}$$

والحل العام :

$$u(x,t) = X_{(x)} \cdot T_{(t)} = (A \cos kx + B \sin kx) \cdot C e^{-c^2 k^2 t}$$
$$= (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx) e^{-c^2 k^2 t} \cdots (8)$$

وبما إن درجة الحرارة تقل بزيادة الزمن فنجد أن الحل المعطى في (8) هو فقط يمثل الحل المطلوب والذي يتناسب مع الطبيعة الفيزياوية للمسألة.

الخطوة الثانية:

الحل يجب ان يحقق الشروط الحدودية (Boundary Conditions)، وبما أن النهايتين تبردان باستمرار، لذا فإن الشروط الحدودية تكون:

$$u(0,t)=0 \quad و \quad u(\ell,t)=0 \quad ----(9)$$

بتطبيق الشرط الاول، نحصل من (8) على:

$$0=A_1 e^{-c^2k^2t} \quad و \quad \therefore A_1=0$$

إذن معادلة (8) تصبح:

$$u(x,t)=B_1 \sin kx \cdot e^{-c^2k^2t} \quad ------(10)$$

وبتطبيق الشرط الحدودي الثاني في (10) نحصل على:

$$0=B_1 \sin k\ell \cdot e^{-c^2k^2t} \quad و \quad \because B_1\neq 0 \quad \therefore \sin k\ell=0 \Rightarrow k=\frac{n\pi}{\ell}$$

لذلك فإن الحل في (10) يصبح:

$$u(x,t)=B_1 \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cdot e^{-c^2n^2\pi^2t/\ell^2} \quad ---(11)$$

وبما ان هذا الحل هو لـ $(n=1,2,3,\dots)$ فإن مجموع هذه الحلول هي أيضاً حلاً للمعادلة التفاضلية. إذن الحل العام يكون بالشكل التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cdot e^{-c^2n^2\pi^2t/\ell^2} \quad ----(12)$$

الخطوة الثالثة:

الحل يجب أن يحقق أيضاً الشروط الابتدائية (Initial Conditions).

نفرض أن التوزيع الابتدائي لدرجات الحرارة خلال القضيب يكون:

$$u(x,0)=f(x)$$

وعند تطبيق هذا الشرط، فإن (12) تصبح:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad ----(13)$$

وهذه هي متسلسلة فورير الجيبية للدالة $f(x)$ لذلك بضرب الطرفين بـ $\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$ والتكامل بنسبة الى (x) (من 0 الى ℓ) نحصل على أن:

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad ----(14)$$

الاستكمال العددي :- INTERPOLATION

مقدمة :- في تجربة مختبرية ما ، وعند تبريد قطعة معدنية ساخنة مثلاً يمكن قياس درجة حرارة القطعة كل خمس دقائق وكما مبين في الجدول التالي :

Time	Temperature
0	110
5	102
10	95
15	87
20	78
25	63
30	56

حيث يمثل العمود الاول المتغير المستقل (في هذه الحالة الزمن) والعمود الثاني المتغير المعتمد (في هذه الحالة درجة الحرارة) أو ما يسمى بالقيم الجدولية. فعندما نريد ايجاد درجة حرارة القطعة لزمن غير مذكور في الجدول (17.5 على سبيل المثال) فان الطريقة التي بواسطتها يتم احتساب درجة الحرارة هي ما تسمى بالاستكمال العددي. إذن المقصود بالاستكمال العددي هو ايجاد حدودية استكمالية لتمثيل نقاط معينة في النقاط $\{f(x_i), x_i\}$ على افتراض ان كلاً من الدالة والحدودية الناتجة عنها يتصرفان بنفس الصيغة خلال أي خطوة معينة.

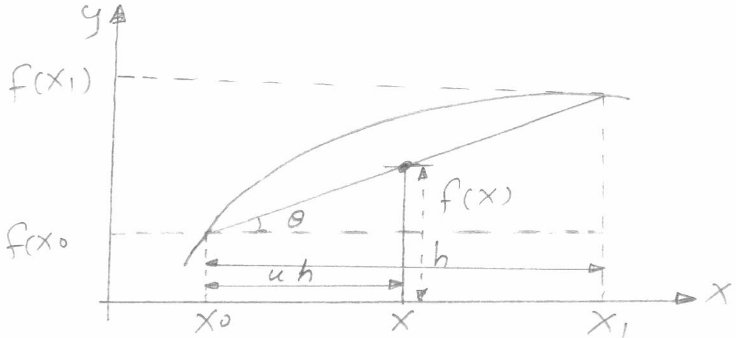
فاذا كانت الحدودية من الدرجة الاولى فان هذا يعني ان الحدودية خطية وهذه بالتأكيد تؤدي الى صيغة الاستكمال الخطي (Linear Interpolation)، وسيتم التركيز على الحدودية اللاخطية وبالتالي يمكن تمثيل الدوال وبشكل دقيق وبصيغة استكمال لاخطي خاصة إذا كانت الخطوات متباعدة.

تعتبر جداول الاستكمال بشكل عام مهمة جداً لاجراء بعض العمليات الحسابية عندما نريد ايجاد قيم جدولية لمتغيرات مستقلة معينة. ونتيجة لتوفر الحاسبات الجيبية والحاسبات الشخصية وبشكل شائع فان عملية احتساب القيم الاستكمالية هو بحد ذاته مكلف نوعاً ما على حساب الوقت الحاسبي لذا نرى ان هناك قيم جدولية كان قد تم خزنها اصلاً في الحاسبات هذه لتوفير زمن العمليات الحسابية (Computing time) وذلك بالاعتماد على ذاكرة الحاسبة (ROM) والتي تعتبر نوعاً ما أرخص وسيلة والامثلة على ذلك كثيرة كالدوال المثلثية والدوال اللوغاريتمية وهذه كلها تؤدي الى توفير هائل في الوقت الحاسبي.

وبما أن الاستكمال هو عملية ايجاد الدالة $f(x)$ لقيم (X) المحصورة بين قيم (X) المدرجة في الجدول والقيم المدرجة ضمن الجدول لـ $f(x)$ المستخدمة في عملية

الاستكمال والتي تسمى أيضاً بال (Pivotal Values)، فالطريقة التقليدية
للاستكمال هي ان القيمة للدالة $f(x)$ ضمن المجال المتاخم لقيم (X) المدرجة
يمكن ان يُمثل بمتعدد الحدود $P(X)$ وأن قيمة (X) يمكن ان تؤخذ على الاساس
التقريبي للدالة $f(X)$ التابع لـ (X) وقبل أن نبدأ بتفصيل صيغ الاستكمال باستخدام
متعددات الحدود، فاننا سنتطرق أولاً الى الاستكمال الخطي والاستكمال التربيعي
لانهما الابسط.

الاستكمال الخطي :- Linear Interpolation



حيث يمثل المنحني بوترابط بين (x_0 , x_1) وكما مبين بالشكل حيث يمكن تحديد قيم الدالة $f(x)$ عند (X) كما يلي :

الانحدار هو:

$$\tan\theta = slope = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{X - X_0}$$

لكون أن: $X = X_0 + uh$

$$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{uh}$$

$$\therefore f(x) = f(x_0) + u\,[f(x_1) - f(x_0)]$$

$$f(x) = f(x_0) + u \cdot \Delta f(x_0)$$

$$i.e. : \; P(u) = f = f_0 + u \cdot \Delta f_0 \qquad 0 \leq u \leq 1$$

Ex. 1 :- Given the following table:

Find the value of $(\ln 9.2)$ using linear interpolation.

X	ln X
9.0	2.1970
9.5	2.2510
10.0	2.3026

Sol :-

$$u = \frac{X - X_0}{X_1 - X_0} = \frac{9.2 - 9.0}{9.5 - 9.0} = 0.4$$

وباستخدام العلاقة: $P(u) = f_0 + u \cdot \Delta f_0$

$$\therefore \ln 9.2 = \ln 9.0 + 0.4\,[\ln 9.5 - \ln 9.0]$$

$$= 2.219$$

الاستكمال التربيعي :- Quadratic Interpolation

يمكن تقريب المنحني الموصل بين النقطة (x_0) والنقطة (x_0+2h) بمنحني قطع مكافئ (Parabola) يمر بالنقاط (x_0, f_0) و (x_1, f_1) و (x_2, f_2) حيث يُمثل هذا المنحني بالعلاقة الآتية :

$$P(u) = f(x) = f_0 + u\,\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 \qquad 0 \le u \le 1$$

Ex. ②:- Find the values of (ln 9.2) in Ex. ① when (ln 10.0) is considered :

Sol.:-
$$\ln 9.2 = 2.1972 + 0.4\,(0.0541) + \frac{0.4(-0.6)}{2*1} \times 0.0028$$
$$= 2.219$$

على العموم ان وجود دالة $f(x_i)$ لقيم (x_i) والتي تمثل جدولا بتجربة مختبرية على سبيل المثال يمكن تقريب هذه الدوال وتمثيلها بمتعدد حدودي $P(x_i)$ ذو أقل درجة ممكنة بغية ان تتحقق الصيغة الآتية :

$$P(x_i) - f(x_i) = 0$$

ومما يمكن ذكره بأن هناك طرق عديدة لايجاد متعدد الحدود $P(x_i)$ الذي يقرب الدالة $f(x_i)$ الى متعدد الحدود اهمها صيغة متعدد الحدود للنقاط متساوية البعد والصيغة الاخرى لايجاد متعدد الحدود للنقاط الغير متساوية البعد، حيث أن الصيغة الاولى تعتمد على جداول الفروقات.

جداول الفروق :- Differences Tables

عندما يُراد وضع متعدد الحدود (Polynomial) يمر خلال نفس نقاط الدوال المجهولة، إذن بالامكان وضع متعدد الحدود ذو درجة تحدد ب :

(درجة متعدد الحدود = عدد النقاط - 1)

فعند اختيار أربعة نقاط - على سبيل المثال - من الجدول المبين :

X	f(x)
1.0	11.3
2.5	18.5
3.0	21.0
4.8	37.0
5.8	56.2

إذن متعدد الحدود المقترح لاربعة نقاط هو :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

وهذا يمثل النقاط $(1, 11.3)$ و $(2.5, 18.5)$ و $(3.0, 21)$ و $(4.8, 37)$ وبالتعويض يمكن ايجاد $(a, b, c \,\&\, d)$ من المعادلات الخطية

بطريقة الحذف أو الطريقة الغير مباشرة، في حين لو يُراد إيجاد المتعدد الحدودي لكي يشمل النقطة الخامسة فالمتعدد السابق لايمكن تطبيقه كل خمسة نقاط، أي يجب استحداث متعدد حدودي بدرجة رابعة وهكذا، وهذا بدوره يمثل طريقة مطولة في التطبيق.

وعلى كل حال فإنه بالامكان اعتبار نقاط الدوال متساوية البعد من بعضها بالنسبة للمتغير المستقل (x) حيث بالامكان تمثيل الدالة $y=f(x)$ وهي الاخرى دالة متقطعة أي أنها معرفة في نقاط متساوية الابعاد على النحو التالي:

$$
\begin{array}{lll}
x_0 & \text{و} & y_0 = f(x) = f_0 \\
x_1 = x_0 + h & \text{و} & y_1 = f(x_0 + h) = f_1 \\
x_2 = x_0 + 2h & \text{و} & y_2 = f(x_0 + 2h) = f_2 \\
x_3 = x_0 + 3h & \text{و} & y_3 = f(x_0 + 3h) = f_3 \\
\vdots & & \vdots \\
x_i = x_0 + ih & \text{و} & y_i = f(x_0 + ih) = f_i \\
\vdots & & \vdots \\
x_n = x_0 + nh & \text{و} & y_n = f(x_0 + nh) = f_n
\end{array}
$$

حيث ان (x_i) هو متغير مستقل ويدعى (Argument) وأن (y_i) يسمى القرين (Mate) أو القيمة الجدولية (Tabulated Value) وهناك صيغ متعددة لتمثيل الفروق أهمها:

أولاً:- الفروق الامامية (Forward Differences)

يرمز للفروق الامامية بالرمز (Δ) ويرمز للفروق ذات الرتبة الاولى بـ Δf_0 ، Δf_1 ، Δf_2 ... الخ، حيث أن:

$$
\begin{aligned}
\Delta f_0 &= f_1 - f_0 \\
\Delta f_1 &= f_2 - f_1 \\
\Delta f_2 &= f_3 - f_2 \\
&\vdots \\
\Delta f_n &= f_{n+1} - f_n
\end{aligned}
$$

اما فروق الرتبة الثانية فيرمز لها بـ $\Delta^2 f_0$ ، $\Delta^2 f_1$ ، $\Delta^2 f_2$ ... الخ، حيث أن:

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 f_0 &= \Delta(\Delta f_0) = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 \\
\Delta^2 f_1 &= \Delta(\Delta f_1) = \Delta f_2 - \Delta f_1 = f_3 - 2f_2 + f_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

وهكذا وبصورة عامة:

$$\Delta^n f_n = \Delta(\Delta^{n-1} f_n)$$

ويكون جدول الفروقات بالشكل التالي:

x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				

ويتم التعامل مع هذا الجدول باختيار النقطة (x_i) أولاً ومن ثم التقدم قطرياً أسفل الدالة $f(x_i)$ وكما مبين في الجدول.

ثانياً :- الفروق الخلفية (Backward Differences)

يرمز للفروق الخلفية بـ (∇) وتعرف بـ:

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$$

وبوضع $(n = 0, 1, 2, \dots)$ نحصل على:

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$$
$$\nabla f_1 = f_1 - f_0$$

وهكذا وبصورة مباشرة فان الفروق الخلفية للرتبة والرتب العليا تعرف كما يلي:

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\nabla^3 f_n = \nabla(\nabla^2 f_n) = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

وهكذا سيكون جدول الفروق الخلفية كما يلي:

x_0	f_0				
		∇f_1			
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$		
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$	
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$		$\nabla^4 f_4$
		∇f_3		$\nabla^3 f_4$	
x_3	f_3		$\nabla^2 f_4$		
		∇f_4			
x_4	f_4				

ويتم التعامل مع جدول الفروقات الخلفية باختيار نقطة (x_i) أولاً ومن ثم التقدم بصورة قطرية أعلى الدالة $f(x_i)$ وكما مبين في الجدول.

ثالثاً :- الفروق المركزية (Centeral Differences)

إن صيغة الفروق المحددة الامامية تطبق إذا كانت النقطة المراد ايجادها موجودة في بداية جدول الفروق، في حين ان صيغة الفروق الخلفية مناسبة حينما تكون النقطة قرب نهاية الجدول، أما عندما تكون النقطة المراد ايجادها في منتصف جدول الفروق فانه يمكن تطبيق الفروق المركزية حيث تكون الاكثر تناسباً مع هذه الحالة.

يرمز للفروق المركزية بـ (δ) وتعرف كما يلي:

$$\delta f_n = f_{n+1/2} - f_{n-1/2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_n - \frac{h}{2}\right)$$

أو: $\delta f_{n+1/2} = f_{n+1} - f_n$

وبوضع $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ نحصل على:

$$\delta f_{1/2} = f_1 - f_0$$
$$\delta f_{3/2} = f_2 - f_1$$
$$\delta f_{5/2} = f_3 - f_2$$

وهكذا وبنفس الاسلوب فأن الفروق المركزية ذات الرتبة الثانية والرتب العليا يمكن ان تعرف ب:

$$\delta^2 f_n = \delta(\delta f_n) = \delta f_{n+1/2} - \delta f_{n-1/2} = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$$

$$\delta^3 f_n = \delta(\delta^2 f_n)$$

وهكذا سيكون جدول الفروق المركزية بالشكل التالي:

x_0	f_0				
		$\delta f_{1/2}$			
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$		$\delta^3 f_{3/2}$	
x_2	f_2		$\delta^2 f_2$		$\delta^4 f_2$
		$\delta f_{5/2}$		$\delta^3 f_{5/2}$	
x_3	f_3		$\delta^2 f_3$		
		$\delta f_{7/2}$			
x_4	f_4				

Ex. 3:- Tabulate the finite difference table for $(y = x^3)$ for $(x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 7, 8)$ when $(h = 1)$:

Sol.:-

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y_i = x_i^3$	0	1	8	27	64	125	216	343	512

x_i	$y_i = x_i^3$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		0
		61		6	
5	125		30		0
		91		6	
6	216		36		0
		127		6	
7	343		42		
		169			
8	512				

حيث أن:

$$\Delta y_0 = \nabla y_1 = \delta y_{1/2} = 1$$
$$\Delta y_2 = \nabla y_3 = \delta y_{5/2} = 19$$
$$\Delta y_5 = 91$$
$$\Delta^3 y_3 = 24$$
$$\Delta^2 y_6 = 42$$

* صيغتي نيوتن للاستكمال الامامي والخلفي :-

Newton Forward and Backward Interpolation Formula

تشمل الطريقة مرور متعدد الحدود ذو الدرجة (n) خلال (n+1) نقطة وتكون النقاط معطاة في الجدول كما يلي :

x	x_1	x_2	x_3	------	x_{n+1}
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	------	$f(x_{n+1})$

في حين ان قيم (x) مرتبة في الجدول على اساس :

$x_{i+1} > x_1$

ولنفرض متعدد الحدود $p(x)$ متمثل بالصيغة التالية :

$$p(x) = a_1 + a_2(x-x_1) + a_3(x-x_1)(x-x_2) + a_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots + a_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \cdots (x-x_n) \quad \text{----- (1)}$$

وان قيم الدوال هي كما يلي :

$$f(x_1) = a_1$$

$$f(x_2) = a_1 + a_2(x_2 - x_1)$$

$$f(x_3) = a_1 + a_2(x_2 - x_1) + a_3(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$$

وان المعاملات اعلاه تكتب هكذا :

$$a_1 = f(x_1)$$

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_1}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta f(x_1)}{1!\, h}$$

$$a_3 = \frac{\Delta^2 f(x_1)}{2!\, h^2}$$

$$a_4 = \frac{\Delta^3 f(x_1)}{3!\, h^3}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = \frac{\Delta^n f(x_1)}{n!\, h^n}$$

ومن ثم لأي معامل :

$$a_i = \frac{\Delta^{i-1} f(x_i)}{(i-1)!\, h^{i-1}}$$

ومن ثم ان متعدد الحدود يمكن أن تكتب هكذا :

$$P(x) = f(x_1) + \frac{\Delta f(x_1)}{1!\,h}(x-x_1) + \frac{\Delta^2 f(x_1)}{2!\,h^2}(x-x_1)(x-x_2)$$

$$+ \frac{\Delta^3 f(x_1)}{3!\,h^3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\Delta^n f(x_1)}{n!\,h^n}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(\ldots)\cdots(x-x_n)$$

فاذا كان : $x = x_1 + uh$ ينتج من هذا :

$$u = \frac{x - x_{n-1}}{h} \quad \text{أو} \quad u = \frac{x - x_1}{h}$$

$$x - x_1 = uh$$
$$x - x_2 = x_1 + uh - (x_1 - h) = h(u-1)$$
$$x - x_3 = x_1 + uh - (x_1 - 2h) = h(u-2)$$
$$\vdots$$
$$x - x_n = x_1 + uh - [x_1 - (n-1)h] = h[u-(n-1)]$$

وبالتعويض في الصورية اعلاه نحصل على :

$$P(x) = f(x_1) + \frac{\Delta f(x_1)}{1!}.u + \frac{\Delta^2 f(x_1)}{2!}u(u-1) +$$

$$\frac{\Delta^3 f(x_1)}{3!}u(u-1)(u-2) + \cdots\cdots +$$

$$\frac{\Delta^n f(x_1)}{n!}u(u-1)(u-2)\cdots(u-(n-1)) \quad \cdots (2)$$

ونستطيع الحصول على العلاقة النهائية أعلاه (2) بالاستفادة من بعض العلاقات فيكون لدينا :

$$f(x_n) = E^u f(x_1) = (1+\Delta)^u f(x_1)$$

$$= \left[1 + u\Delta + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-(n-1))}{n!}\right] f(x_1)$$

$$= f(x_1) + u\Delta f(x_1) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_1) +$$

$$\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f(x_1) + \cdots\cdots +$$

$$\frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-(n-1))}{n!}\Delta^n f(x_1)$$

حيث ان :

$$u = \frac{x - x_1}{h}$$

حيث يطلق على هذه العلاقة بصيغة استكمال نيوتن-كريكوري الامامية
(Gregory-Newton Forward Interpolation Formula)
أو صيغة نيوتن للخطوات المتساوية (Newton's Formula for Equal Intervals).
وهذه الصيغة تكون مفيدة للاستكمال بالقرب من بداية مجموعة القيم المجدولة ، أما اذا أريد في نهاية مجموعة القيم المجدولة فانه في هذه الحالة يتم تطبيق صيغة نيوتن الخلفية والتي يمكن أن نحصل عليها من علاقات معينة وكما يلي:

$$f_n = E^u f_0 = (1-\nabla)^{-u} f_0$$
$$= f_0 + u \nabla f_0 + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!} \nabla^3 f_0 + \ldots\ldots$$

حيث ان : $u = \dfrac{x - x_0}{h}$

حيث تعرف هذه الصيغة بصيغة نيوتن-كريكوري الخلفية
(Gregory-Newton Backward Interpolation Formula)
ويمكن توضيح الصيغتين اعلاه في الامثلة التالية:

Ex. 4:- Find the velocity of the rocket by using Newton interpolating polynomial at ($t = 150$) seconds:

t (s)	0	60	120	180	240	300
V (mile/sec)	0	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.2224

Sol:-

t	V	D	D^2	D^3	D^4	D^5
0	0	0.0824	0.1099	0.0733	0.1029	0.4644
60	0.0824	0.1932	0.1831	0.1762	0.5673	
120	0.2747	0.3755	0.3594	0.7435		
180	0.6502	0.7344	1.1029			
240	1.3851	1.8878				
300	3.2224					

باستخدام قاعدة نيوتن للاستكمال الامامي واعتبار الخطوة

$h = t_{i+1} - t_i = 60$

$u = \dfrac{t - t_1}{h} = \dfrac{150 - 0}{60} = 2.5$

$$\therefore P_{(150)} = V_{(150\,sec)} = 0 + \frac{0.0824}{1!} * 2.5 + \frac{0.1099}{2!} * 2.5 * (2.5-1) + \frac{0.0733}{3!} * 2.5 * (2.5-1)(2.5-2) + \frac{0.1029}{4!} * 2.5 * (2.5-1)(2.5-2)(2.5-3) + \frac{0.4644}{5!} * 2.5 * (2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4) = 0.4365 \text{ mile/sec.}$$

Ex. 5 :- Construct Newton interpolation polynomial on the interval $(3.5 \rightarrow 3.7)$ for the function $y = e^x$ using $h = 0.05$!

Sol :- تتم بداية الحل بتكوين الجدول الآتي للدالة (y) لمختلف قيم (X) هكذا :

X	3.5	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36.598	38.457	40.447

وباستخدام قاعدة نيوتن للاستكمال الامامي :

$$P_n(X) = f_0 = \frac{\Delta f_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}u(u-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!}u(u-1)(u-2) + \cdots$$

حيث ان :-

$$u = \frac{X - X_0}{h} = \frac{X - 3.5}{0.05} = 20(X - 3.5)$$

بعد ذلك يتم عمل جدول الفروق الامامية هكذا :

X	$y = e^x$	Δ	Δ^2	Δ^3
3.5	33.115			
		1.698		
3.55	34.813		0.087	
				0.005
3.60	36.598	1.785		
			0.092	
		1.877		0.003
3.65	38.457			
			0.095	
3.70	40.447	1.972		

وعند التعويض في الصيغة اعلاه نحصل على :

$$P_3(X) = 33.115 + 1.698 * 20 * (X - 3.5) + 0.087 * 20 * (X - 3.5) * \frac{20(X-3.5)-1}{2} + \frac{0.005}{6}(20*(X-3.5)) * (20*(X-3.5)-1)(20*(X-3.5)-2)$$

وبذلك يمكن فتح الحدود وجمع المتشابه منها وتبسيط المعادلة .

Ex. 6 :- Given the following function $y = \log_{10} X$ find $y = \log_{10} 1044$ for $(X = 1000\ (10)\ 1050)$ by using interpolation !

Sol:- يتم عمل جدول الفروق وكما يلي :

X	$y = \log_{10} X$	∇^1	∇^2	∇^3
1000	3.00000			
		0.00432		
1010	3.00432		-0.000426	
		0.004278		0.0008
1020	3.00860		-0.000418	
		0.00423		0.00009
1030	3.01283		-0.000409	
		0.00419		0.00009
1040	3.017033		-0.000401	
		0.00415		
1050	3.021189			

$$u = \frac{X - X_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

لكون ان (X) تقع في نهاية الجدول نستخدم علاقة الاستكمال الخلفي فنحصل على :

$$P_3(X) = \log_{10} 1044 = f_n + \frac{\nabla f_n}{1!} u + \frac{\nabla^2 f_n}{2!} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!} * u(u+1)(u+2)$$

$$= 3.021189 + \frac{0.00415}{1!} * (-0.6) + \frac{(-0.000401)}{2!} * (-0.6) * (-0.6+1) + \frac{0.00009}{3!} * (-0.6) * (-0.6+1) * (-0.6+2)$$

$$= 3.01887005$$

(*) وتوجد صيغ ايضاً لاستكمال الفروق المركزية لن نتطرق لها الآن :

(*) صيغ لاكرانج الاستكمالية :- Lagrange Interpolation Formula

تعتمد طريقة الفروق المحددة (Finite Differences) كل الجداول لايجاد قيمة الدالة (Function) عند نقطة معينة وللنقاط ذات المسافات المتساوية في حين تستخدم طريقة لاكرانج التناسبية لتطابق الدالة عند نقاط غير محددة المسافات أو غير متساوية المسافات حيث نعتبر الدالة $y = L(X)$.

حيث ان :

$$L(X) = L_1(X) y_1 + L_2(X) y_2 + L_3(X) y_3 + \cdots + L_n(X) y_n$$

المعادلة السابقة هي متعددة حدود وتسمى (Polynomial) وباستخدام هذه الطريقة تستخدم تلك المعادلة لايجاد $y=L(x)$ وبعد التعويض ب (x) يمكن استخراج قيمة (y)، حيث أن (y) هي قيمة الدالة في النقطة (i) وفي كل نقطة تظهر $f(x)$.

أو بشكل عام:

$$y = L(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)\, y_i \quad ; \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

إذ يضرب هذا الحد في نفسه (n) مرة وان $(j \neq i)$ في حين ان $(i=$ثابت$)$ و $(j=$متغير$)$ وللتحقق من ذلك يجب ان يكون $\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1$.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)}$$

$$\vdots$$

$$L_{n-1}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}$$

وبشكل عام يمكن تحديد درجة المعادلة الناتجة بأنها تساوي عدد النقاط مطروحاً منه واحد .

Ex. 7 :- If $y(1)=12$, $y(2)=15$, $y(5)=25$ and $y(6)=30$, find the four points Lagrange interpolation polynomial that takes some value of the function (y) at the given points and estimate the value of $y(4)$?

Sol. :-

لأربعة نقاط يتطلب الحل ايجاد $(4L)$ وكما يلي:

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(-1)(-4)(-5)} = \frac{x^3-13x^2+41x-30}{-20}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(1)(-3)(-4)} = \frac{x^3-12x^2+41x-30}{12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4)(3)(-1)} = \frac{-(x^3-9x^2+20x-12)}{-12}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(5)(4)(1)} = \frac{x^3-8x^2+17x-10}{20}$$

$\therefore$ الصورة المطلوبة هي: $L(x) = 12L_1(x) + 15L_2(x) + 25L_3(x) + 30L_4(x)$

$$\therefore y = \frac{4x^3 - 27x^2 + 233x + 510}{60}$$

لايجاد $y(4)$ نضع $(x=4)$ فنحصل على:

$y(4) = 12.1$

التفاضل والتكامل العددي

(Numerical Differentiation and Integration)

اولاً :- التفاضل العددي

يتم اللجوء الى التفاضل العددي عندما يُراد ايجاد المشتقة لدوال معقدة والتي يصعب ايجاد قيمة مشتقتها بشكل يسير وكذلك الحال بالنسبة للدوال المعرّفة فقط في بيانات مجدولة او نتائج مختبرية .

اذن التفاضل العددي هو عملية حساب المشتقة للدالة عن طريق القيم المُعطاة لتلك الدالة ، وسنتطرق الى قيم الدالة معطاة في نقاط ذات مسافات متساوية عن بعضها البعض وبذلك يمكن تمثيل الدالة بصيغ نيوتن الاستكمالية .

١- التفاضل العددي بأستخدام صيغة نيوتن الامامية

إن صيغة نيوتن الامامية العامة هي :

$$y = y_0 + u \cdot \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \cdots \quad \cdots (1)$$

حيث ان : $u = \frac{X - X_0}{h} \quad \cdots (2)$ وان (X) هي القيمة المراد ايجاد مشتقة الدالة عندها ، وان (X_0) هي القيمة الابتدائية ، وان (h) هو المسافة المتساوية البعد . فيكون التفاضل نسبة الى (X) هكذا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \cdots (3)$$

فسيكون لدينا من المعادلة (1) :

$$\frac{dy}{du} = 0 + 1 \cdot \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2 - 6u + 2) + \cdots \quad \cdots (4)$$

ومن المعادلة (2) : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \quad \cdots (5)$ اذن تصبح المعادلة (3) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2 - 6u + 2) + \cdots\right] \quad \cdots (6)$$

يمكن ملاحظة ان $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ عند $(X = X_0)$ وبالتالي فأن $(u = 0)$ انها تساوي :

$$y'(X_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \cdots\right] \quad \cdots (7)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{du}{dx}$$: وبتفاضل المعادلة (6) مرة أخرى نحصل على

$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{d}{du}\left\{\frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2-6u+2)+\cdots\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[0 + \Delta^2 y_0 + (u-1)\cdot\Delta^3 y_0 + \cdots\right] = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (u-1)\cdot\Delta^3 y_0 + \cdots\right]$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المشتقات ذات الرتب العليا ، وأن $y''(x_0)$ (عند $u=0$) هي :

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right]$$

EX (1):- By using Newton forward formula, find the value of $y'(x)$ at $(x = 2.5)$. Use the following data table :

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-8	-7	0	19	56

So. :-

يتم اولاً عمل جدول الفروقات :

x	$f(x)$	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
0	-8			
		1		
1	-7		6	
		7		6
2	0		12	
		19		6
3	19		18	
		37		
4	56			

2.5

$h = 1-0 = 2-1 = \cdots = 1$

$\Delta y_0 = -7-(-8) = 1$

$\Delta y_0 = 0-(-7) = 7$

$\Delta^2 y_0 = 7-1 = 6$

$\Delta^2 y_0 = 19-7 = 12$

$\Delta^3 y_0 =$ بعد ذلك نحسب قيمة (u) :

$$u = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2.5-0}{1} = 2.5$$

$$\therefore y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(3u^2-6u+2)\right]$$

$$y'(2.5) = \frac{1}{1}\left[1 + \frac{6}{2}(2*(2.5)-1) + \frac{6}{6}(3*(2.5)^2 - 6*2.5+2)\right]$$

$$= [1 + 12 + 5.75]$$

$$= 18.75$$

هذه هي قيمة المشتقة للدالة الغير معروفة عند التعويض بقيمة $(x = 2.5)$.

طبّق نفس جدول البيانات لحساب (y') عند $(x = 3.1)$ و $(x = 2.2)$ ،

لاحظ ان التغير الوحيد الحاصل هو في قيمة (u) لان (x) قد اختلف .

لاحظ انه في هذا المثال فأن $(\Delta^4 y_0 = 6-6 = 0)$ ، ثم أوجد $y''(x)$.

(2)

EX. (2) :- Find the exact and approximate value of the derivative for the following function at $X = 2.3$ & $X = X_0$

$y = f(x) = X^4 - \ln X$ $\quad (X = 1 \rightarrow 3.5)$ و $h = 0.5$

Sol. :-

يتم اولاً عمل جدول البيانات لهذه الدالة بتعويض قيمة (X) هكذا : 3D

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
f(X)	1.0	4.657	15.307	38.146	79.901	148.810

بعد ذلك يتم عمل جدول الفروقات الامامية :

X	f(X)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	1.0	3.657	6.993	5.196
1.5	4.657	10.650	12.189	6.727
2.0	15.307	22.839	18.916	8.238
2.5	38.146	41.755	27.154	
3.0	79.901	68.909		
3.5	148.810			

لاحظ ان (u) :

$$u(2.3) = \frac{2.3 - 1}{0.5} = 2.6$$

$$\therefore y'(2.3) = \frac{1}{0.5}\left[3.657 + \frac{6.993}{2}(2 \times 2.6 - 1) + \frac{5.196}{6}(3 \times (2.6)^2 - 6 \times 2.6 + 2)\right]$$

$$= \frac{1}{0.5}[3.657 + 14.685 + 5.785]$$

$$= \underline{48.255}$$

ولمقارنتها مع قيمة المشتقة الحقيقية :

$$y' = 4X^3 - \frac{1}{X} \Rightarrow y'_{(2.3)} = 4(2.3)^3 - \frac{1}{2.3} = \underline{48.233}$$

اما لـ $(X = X_0)$ فأن (u) تساوي صفر ونستخدم القانون الخاص :

$$y'(X_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4}\right]$$

$$\therefore y'(1) = \frac{1}{0.5}\left[3.657 - \frac{6.993}{2} + \frac{5.196}{3}\right]$$

$$= \underline{\underline{3.785}}$$

لاحظ ان القيمة التقريبية هي اكبر بكثير من القيمة الحقيقية والسبب في ذلك هو عدم اخذ الحد الرابع $(\underline{\Delta^4 y_0})$ وعند اخذه ستكون (3.020) ، جرب ذلك ، ثم أوجد $y''(x)$.

$$y'(1) = 4 - 1 = \underline{3.000}$$

2- التفاضل العددي باستخدام صيغة نيوتن الخلفية

ان صيغة نيوتن الخلفية العامة هي :

$$y = y_{n+1} + u\nabla y_{n+1} + \frac{u(u+1)}{2!}\cdot\nabla^2 y_{n+1} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\cdot\nabla^3 y_{n+1} + \cdots \quad (1)$$

وبالتفاضل نسبة الى (u) نحصل على :

$$\frac{dy}{du} = 0 + \nabla y_{n+1} + \frac{2u+1}{2}\cdot\nabla^2 y_{n+1} + \frac{3u^2+6u+2}{6}\cdot\nabla^3 y_{n+1} + \frac{2u^3+9u^2+11u+3}{12}\cdot\nabla^4 y_{n+1} + \cdots \quad (2)$$

وان : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\nabla y_{n+1} + \frac{2u+1}{2}\cdot\nabla^2 y_{n+1} + \frac{3u^2+6u+2}{6}\cdot\nabla^3 y_{n+1} + \cdots\right] \quad (3)$$

$$\& \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_{n+1} + (u+1)\cdot\nabla^3 y_{n+1} + \frac{6u^2+18u+11}{12}\cdot\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\right] \quad (4)$$

وعند النقطة (x_0) فانه يكون لدينا $(u=0)$ ، فعندئذٍ تصبح المعادلة (3) و(4) كما يلي :

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\nabla y_{n+1} + \frac{1}{2}\nabla^2 y_{n+1} + \frac{1}{3}\nabla^3 y_{n+1} + \frac{1}{4}\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\right] \quad (5)$$

$$\& \quad y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_{n+1} + \frac{1}{2}\nabla^3 y_{n+1} + \frac{11}{12}\nabla^4 y_{n+1} + \cdots\right] \quad (6)$$

ملاحظة ان ∇y_{n+1} و $\nabla^2 y_{n+1}$ و $\nabla^3 y_{n+1}$ تعني الفروقات الاخيرة وليست الاولى كما في الامامية (Δy_0) ، ويمكن التعبير عنها بـ (∇y_n) المهم انها تعني الاخيرة كما ان (u) هي :

$$u = \frac{x - x_{n+1}}{h} \quad \underline{\underline{or}} \quad = \frac{x - x_n}{h}$$

Ex. (3):- Solve Ex. (1) by using Newton backward formula:-

Sol:-

x	y	∇y_{n+1}	$\nabla^2 y_{n+1}$	$\nabla^3 y_{n+1}$
0	-8			
		1		
1	-7		6	
		7		6
2	0		12	
		19		6
3	19		18	
		37		
4	56			

$$u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2.5 - 4}{1} = -1.5$$

$$\therefore y'(x) = \frac{1}{h}\left[\nabla y_{n+1} + \frac{2u+1}{2}\cdot\nabla^2 y_{n+1} + \frac{3u^2+6u+2}{6}\cdot\nabla^3 y_{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[37 + \frac{2*(-1.5)+1}{2}*18 + \frac{3*(-1.5)^2+6*(-1.5)+2}{6}*6\right]$$

$$= [37 - 18 - 0.25]$$

$$= 18.75$$

ظهر نفس الحل بالضبط .

أوجد الآن $y''(x)$.

ملاحظة في كثير من الاحيان وخاصة للدوال المعقدة يظهر هنالك فرق يختلف باختلاف الدوال بين القيمة الحقيقية للمشتقة والقيمة المقربة بالحل العددي، يمكن حساب هذا الفرق بكثير من المصطلحات واحدة منها هو الخطأ النسبي الحقيقي (خ.ن.ح.) او الخطأ النسبي الصحيح (خ.ن.ص.) وهو :

$$\left(\begin{array}{c}\text{خ.ن.ح. او} \\ \text{خ.ن.ص.}\end{array}\right) = \frac{\text{القيمة الحقيقية - القيمة التقريبية}}{\text{القيمة الحقيقية}} * 100\%$$

فمثلاً في المثال ② نلاحظ الفرق بين القيمة الحقيقية والمقربة لـ $(x=2.3)$ و لـ $(x=1)$ ايضاً حيث ان :

$$\underset{(x=2.3)}{\text{خ.ن.ح.}} = \frac{48.255-48.233}{48.233} * 100\% \simeq -0.05$$ اي ضمن من المئة بالمئة بالسالب

$$\underset{(x=1)}{\text{خ.ن.ص.}} = \frac{3.785-3.000}{3.000} * 100\% \simeq -26.17$$ اي تقريباً ست وعشرون بالمئة بالسالب

وعندما نأخذ الحد الرابع $= \frac{3.020-3.000}{3.000} * 100\% \simeq -0.67$ اي تصبح اقل بكثير

فكلما قلّ هذا المقدار فهذا يعني ان الطريقة دقيقة وتقترب من الحل الصحيح المضبوط.

توجد مصادر كثيرة للخطأ كما قلنا في حل المسائل الرياضية مثل الخطأ المستأصل والخطأ التحليلي والخطأ الحسابي بنوعيه المبتور (المقطوع) والمدوّر (التقريب) .

كما يوجد ما يُسمى بالخطأ النسبي التقريبي .يمكن ان يتطابق الحل الصحيح مع الحل العددي كما في المثال الآتي .

امثلة واسئلة

① Find the approximate value of $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ for the following function for $(x=3.75)$ by using Newton forward and backward formulas, and find the exact value of (y') and the absolute relative error

$y=X^3 \quad (X=0-6) \quad h=1 \quad (4D)$

Sol:-

X	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		6
5	125		30	
		91		
6	216			

المشتقة الحقيقية :

$y = X^3$

$y' = 3X^2 \Rightarrow$

$y'(3.75) = 3*(3.75)^2 = 42.1875$

أ- صيغة نيوتن الامامية :

$$u = \frac{x-x_0}{h} = \frac{3.75-0}{1} = 3.75$$

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2}(2u-1) + \frac{\Delta^3}{6}(3u^2-6u+2)\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[1 + \frac{6}{2}(2*3.75-1) + \frac{6}{6}(3(3.75)^2-6*3.75+2)\right]$$

$$= [1 + 19.5 + 21.6875]$$

$$= 42.1875$$

$\therefore$ خ.ن.م. $= 100 * \frac{42.1875 - 42.1875}{42.1875} = 0\%$

ب- صيغة نيوتن الخلفية :

$$u = \frac{x-x_n}{h} = \frac{3.75-6}{1} = -2.25$$

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta + \frac{\Delta^2}{2}(2u+1) + \frac{\Delta^3}{6}(3u^2+6u+2)\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[91 + \frac{30}{2}(2*(-2.25)+1) + \frac{6}{6}(3*(-2.25)^2+6*(-2.25)+2)\right]$$

$$= 42.1875$$

$\therefore$ خ.ن.م. $= 0.0\%$ ايضاً

اي ان هنالك تطابق بين القيمة الحقيقية والقيمتين التقريبيتين اذا كان الحل لأربع مراتب عشرية . والآن أوجد $y''(x)$.

② Find ($y'(2.16)$) by using Newton forward formula and the table below:

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	1.729	1.691	1.505	1.416	1.311

Sol.:-

X	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
1.0	1.729			
		-0.038		
1.5	1.691		-0.148	
		-0.186		0.245
2.0	1.505		0.097	
		-0.089		-0.113
2.5	1.416		-0.016	
		-0.105		
3.0	1.311			

$$u = \frac{2.16 - 1.0}{0.5} = 2.32$$

$$\therefore y'_{(2.16)} = \frac{1}{0.5}\left[(-0.038) + \frac{(-0.148)}{2} * (2*(2.32)-1) + \frac{0.245}{3} * (3*(2.32)^2 - 6*(2.32)+2)\right] = 0.076$$

والآن أوجد $y''(x)$

③ Find ($y'(0.7)$) by using Newton backward formula and the table below:

X	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	0.00	0.12	0.48	1.10	2.00	3.20

Sol.:-

X	f(x)	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
0.0	0.00			
		0.12		
0.2	0.12		0.24	
		0.36		0.02
0.4	0.48		0.26	
		0.62		0.02
0.6	1.10		0.28	
		0.90		0.02
0.8	2.00		0.30	
		1.20		
1.0	3.20			

$$u = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0.7 - 1.0}{0.2} = -1.5$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0.7} = \frac{1}{h}\left[\nabla y + \frac{2u+1}{2}\cdot\nabla^2 y + \frac{3u^2+6u+2}{6}\cdot\nabla^3 y\right]$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[1.20 + (-0.30) + \frac{3(2.25) - 9.00 + 2}{6} * (0.02)\right]$$

$$= 5(1.20 - 0.30 - 0.00)$$

$$= 4.50$$

والآن أوجد $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0.7}$

④ By using Newton forward, find (y') & (y'') for:

Ⓐ

X	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
y	3.2188	3.4096	3.5836	3.7436	3.8918	4.0298	4.1588

$(y'' = \quad)$, $(y' = 0.3125)$ = Ans. $(X = 6.4)$

Ⓑ

X	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
y	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41072	0.52110

$(y'' = \quad)$, $(y' = 2.06789)$ = Ans. $(X = 0.13)$

Ⓒ

X	0	1	2	3	4
y	6.9897	7.4036	7.7815	8.7815	8.4510

$(y'' = \quad)$, $(y' = 0.4443)$ = Ans. $(X = 1.75)$

Ⓓ

X	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	30.13	31.62	32.87	33.64	33.95	33.81	33.24

$(y'' = \quad)$, $(y' = -9.00)$ = Ans. $(X = 0.45)$

⑤ By using Newton backward formula, find (y') & (y'') for:

Ⓐ

X	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
y	2.1783	3.3201	4.0552	4.9530	6.0496	7.3891	9.0250

$(y'' = \quad)$, $(y' = 5.4719)$ = Ans. $(X = 1.7)$

Ⓑ

X	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.9320	0.9636	0.9855	0.9975	0.9996

$(y'' = \quad)$, $(y' = 0.021)$ = Ans. $(X = 1.55)$

Ⓒ

X	0	10	20	30	40	50	60	70
y	30.0	31.7	33.6	35.7	38.0	40.7	43.7	47.1

$(y'' = \quad)$, $(y' = 0.2)$ = Ans. $(X = 19)$

3 - التفاضل العددي باستخدام صيغة لاكرانج الاستكمالية

كثيراً ما نحتاج لإيجاد المشتقة في نقاط غير متساوية المسافات بعضها عن بعض وفي هذه الحالة يتم اللجوء الى متعددة حدود لاكرانج.

فعلى سبيل المثال فإن متعددة حدود لاكرانج من الدرجة الثانية هي:

$$f(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot f(x_{i-1}) +$$

$$\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot f(x_i) +$$

$$\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot f(x_{i+1}) \quad \cdots\cdots (1)$$

وبتفاضل العلاقة (1) نحصل على:

$$f'(x) = \frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot f(x_{i-1}) +$$

$$\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot f(x_i) +$$

$$\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot f(x_{i+1}) \quad \cdots (2)$$

على الرغم من ظهور صيغة التعقيد في العلاقة (2) الا أنها تمتلك فوائد متعددة مهمة أولها القابلية على احتساب المشتقة في أي مكان ضمن المدى المحدد بالنقاط الثلاثة، وثانيها انه ليس بالضرورة ان تكون النقاط متساوية الابعاد، وثالثها أنها تعطي دقة كبيرة جداً.

Ex.:- Find the first derivatives of the function tabulated below, at the point (1.5):

X	1.2	1.5	1.7
$y(x)$	0.1823	0.4055	0.5306
	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}

Sol.:- $x = x_i$

لكون ان المسافات غير متساوية بين نقاط الجدول لذا يجب استخدام صيغة لاكرانج الاستكمالية لايجاد المشتقة الاولى وذلك بتطبيق المعادلة (2):

$$f'(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} f(x_{i-1}) +$$

$$\frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} f(x_i) +$$

$$\frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} f(x_{i+1})$$

$$\therefore f'(1.5) = \frac{2(1.5) - 1.5 - 1.7}{(-0.3)(-0.5)}(0.1823) +$$

$$\frac{2(1.5) - 1.2 - 1.7}{(0.3)(-0.2)}(0.4055) +$$

$$\frac{2(1.5) - 1.2 - 1.5}{(0.5)(0.2)}(0.5306)$$

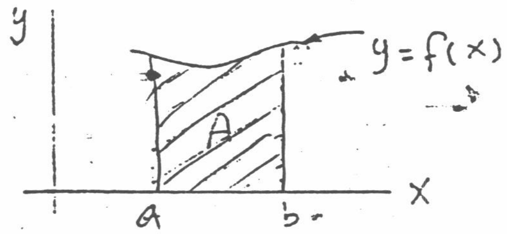
$$= 0.6729$$

كذلك يمكن ايجاد $f(x)$ لقيمة اخرى لـ (x) لانها معروفة و هي (0.4055)، وكذلك يمكن ايجاد قيمة المشتقة لأي (x) بين هذه القيم الثلاثة، حيث أنه في هذا المثال قد تصادف كون $x_i = x$.

تحليلات / ثالث تكليف مكتب المهندس
استنساخ ليث

ثانياً :- التكامل العددي

من التطبيقات الشائعة للطرق العددية هو استعمالها في حساب تكامل محدد او ما يعبر عن المساحة تحت المنحنيات، كما في الشكل ادناه:



اي ان : $I = \int_a^b f(x)\,dx$

يتم اللجوء الى التكامل العددي عندما تكون هناك صعوبة وأحياناً استحالة في ايجاد قيمة التكامل للدالة بالطرق التحليلية المعتادة او عندما يكون التكامل معرف بمجموعة قيم تشكل جدول مثل جدول قراءات مختبرية لتجربة معينة.

وسيتم التطرق هنا الى التكامل الاحادي ولنقاط متساوية المسافات دون التطرق الى بقية انواع التكاملات. ومن اهم طرق التكامل التي يمكن التطرق اليها هي:

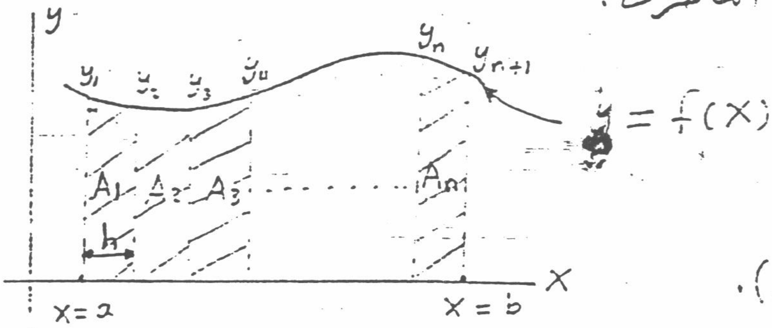
1- قاعدة شبه المنحرف (Trapezoidal Rule)

لايجاد القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x)$ للمجال a الى b : $I = \int_a^b f(x)\cdot dx$

باستخدام قاعدة شبه المنحرف يمكن اتباع الخطوات التالية:

أ- جزئ الفترة بين (a,b) الى (N) من الفترات الجزئية متساوية الاطوال، طول كل منها يساوي (h) حيث يحسب (h) كما يلي: $h = \frac{b-a}{N}$

والشكل ادناه يوضح كيفية هذه التجزئة، حيث ينتج منها (N) من الشرائح تحت المنحني $y=f(x)$. وكل شريحة منها تأخذ شكلاً قريباً من شبه المنحرف، والتي يمكن حساب مساحتها وفقاً لقاعدة شبه المنحرف:



$$A_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\cdot h$$

اذا كانت عدد الشرائح (N) فان عدد الارتفاعات (y) هي $(N+1)$.

ب- نحسب المساحة الكلية التقريبية المحصورة تحت المنحني وبين $X=a$ و $X=b$ نتيجة لجمع مساحات شرائح $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ وكما يلي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Total Area} = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \text{المساحة الكلية}$$

$$= \frac{1}{2} h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2} h(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{1}{2} h(y_n + y_{n+1})$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_n + y_{n+1}]$$

$$= \frac{h}{2}[\text{الاولى} + \text{الاخيرة} + 2 * \text{البقية}]$$

ان دقة قيمة التكامل تعتمد على عدد الشرائح الناتجة عن تقسيم المساحة تحت المنحني، فكلما زاد عدد الشرائح (N) (اي صغرت قيمة (h)) ازدادت قيمة التكامل دقة .

Ex.(1):- Evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ to four decimal places by the trapezoidal rule ; where the interval $(0,1)$ is sub-divided into (6) equal parts :

So.:-

ان الصيغة العامة لقاعدة شبه المنحرف

والتي يمكن البدء بها من (y_0) هي :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

وبما ان $N = 6 \Leftarrow$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

اي ان $(x = 0 \to 1)$ بزيادة مقدارها $(1/6)$ ، نعوض قيم (x) بالدالة $f(x)$.

والتي هي هنا $(1/(1+x^2))$ فنحصل على الجدول التالي :

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
$y = f(x) = 1/(1+x^2)$	1.0000	0.9730	0.9000	0.8000	0.6923	0.5902	0.5000
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
او	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1/6}{2}[1 + 2*(0.9730 + 0.9 + 0.8 + 0.6923 + 0.5902) + 0.5]$$

$$= 0.7843$$

أعد حل المثال مستخدماً $(N=8)$.

ان دقة قيمة التكامل سوف تزداد لان عدد الشرائح اصبح (8) .

ان عدد الارتفاعات (y) ستصبح $(N+1)$ كما قلنا اي (9) $(y_0 \to y_8)$

$= 0.7847 = Ans.$

٢- قاعدة سمبسون الثلث (Simpson's (1/3) Rule):

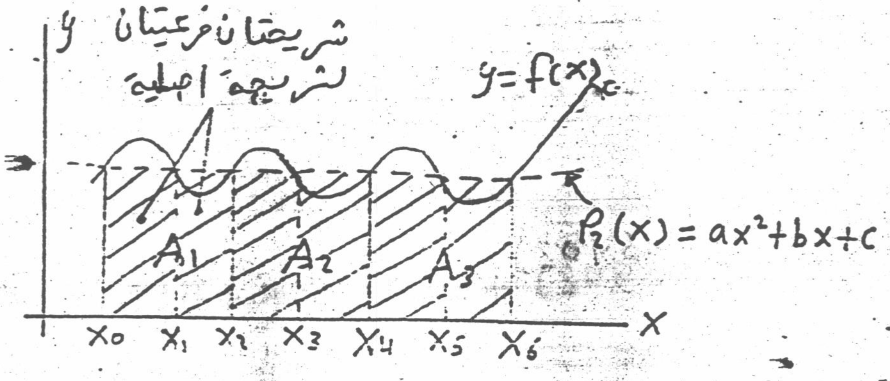
في هذه القاعدة، نقسم الفترة (a، b) الى عدد زوجي (N) من الفترات جزئية المتساوية الطول وطول كل منها يساوي (h) حيث ان: $h=\frac{b-a}{N}$

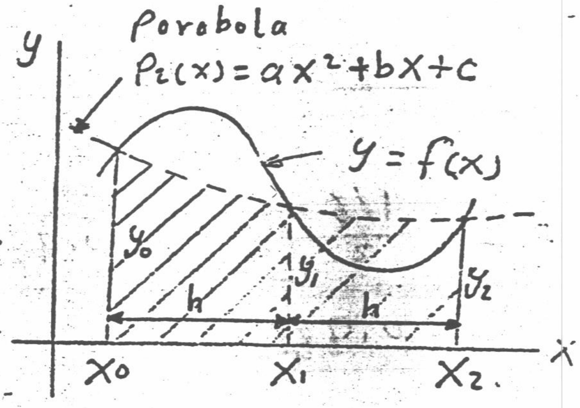
ووفقاً لهذه القاعدة يتم ربط ثلاثة نقاط من الدالة بمتعدد حدودية من الدرجة الثانية اي قطع مكافئ (Parabola)، ومجموع المساحات تحت منحني متعدد الحدودية تمثل المساحة التقريبية تحت المنحني. إن أبسط اشتقاق لقاعدة سمبسون الثلث (كما في الشكل ادناه) يكون باستخدام صيغة الفروق الامامية لنيوتن:

$$f(x)=f(x_0)+u.\Delta f(x_0)+\frac{u(u-1)}{2!}.\Delta^2 f(x_0)+\cdots$$

او:

$$f(x)=y_0+u.\Delta y_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\cdots \quad (1)$$





علماً ان: $u=\frac{x-x_0}{h}$ ، وان (h): هو طول الخطوة وهو ثابت.

ونلاحظ من المعادلة (1) بانها تمثل متعدد حدودي من الدرجة الثانية. وبتكامل (1) نسبة الى (x) (من x_0 الى x_2) نحصل على:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_2}\left\{y_0+u.\Delta y_0+\frac{u^2-u}{2!}.\Delta^2 y_0\right\}dx$$

فنحصل بعد التكامل والتبسيط على:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right] \cdots (2)$$

ويكرر نفس هذا التحليل لجميع الشرائح فنحصل على الصيغة العامة التالية:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

$$=\frac{h}{3}\left[y_0+4\sum_{i=1,3,5,\ldots} y_i+2\sum_{i=2,4,6,\ldots} y_i+y_n\right] \cdots (3)$$

Ex. ② :- Use Simpson's $\frac{1}{3}$ rule for evaluation of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, considering (6) strips

Sol.:- نحصل على الفترة الجزئية (h) من :

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

وأن قاعدة الثلث لسمبسون تعرف كما يلي :

$$I = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4) + y_6\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[\text{الأولى} + \text{الأخيرة} + 4 * \text{الفردي} + 2 * \text{الزوجي}\right]$$

∴ يمكن احتساب قيم (y_0 الى y_6) ولقيم ($x=0$ الى $x=1$) من خلال الدالة $y = f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ وكما في الجدول التالي :

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
X	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$y = f(x) = 1/(1+x^2)$	1	0.9730	0.9	0.8	0.6923	0.5902	0.5

اذن قيمة التكامل عددياً يكون :

$$I = \frac{1/6}{3}\left[1 + 4(0.9730 + 0.8 + 0.5902) + 2(0.9 + 0.6923) + 0.5\right]$$

$$\simeq 0.7854$$

وبذلك تكون ادق من الطريقة الاولى حتى عندما ($N=8$) .

امثلة واسئلة

① Find the integral value of the function below by using trapezoidal rule :

$$y = x^3 + x^2 - 5 \quad (a = 1 ,\ b = 5 ,\ N = 8) \qquad (30)$$

Sol.:-

$$\int_1^5 (x^3 + x^2 - 5)\, dx \qquad h = \frac{b-a}{N} = \frac{5-1}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	-3.000	0.625	7.000	16.875	31.000	50.125	75.000	106.375	145.000

$$\therefore I = \frac{0.5}{2}\left[(-3.000) + 2*(0.625 + 7.000 + 16.875 + 31.000 + 50.125 + 75.000 + 106.375) + 145.000\right]$$

$$= 179.000$$

② Solve EX. ① using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule:

Sol: باستخدام نفس الجدول وبنفس الـ (h) :-

$$I = \frac{0.5}{3}[(-3.000) + 4*(0.625 + 16.875 + 50.125 + 106.375) + 2*(7.000 + 31.000 + 75.000) + 145.000]$$

$$= 177.333$$

③ Which method in EX. ① and EX. ② was the nearest to the exact solution?

Sol: يجب اولاً ايجاد القيمة الحقيقية للتكامل :

$$I = \int_1^5 (x^3 + x^2 - 5)\,dx = \int_1^5 x^3\,dx + \int_1^5 x^2\,dx - \int_1^5 5\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_1^5 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 - 5x\Big|_1^5 = \frac{(5)^4-(1)^4}{4} + \frac{(5)^3-(1)^3}{3} - 5(5-1)$$

$$= 156.000 + 41.333 - 20 = 177.333$$

اي ان طريقة سمبسون الثلث كانت ادق . واذا كان هنالك اختلاف في قيم التكاملات الثلاثة فيمكن اللجوء الى الخطأ النسبي الحقيقي هكذا :

$$\text{خ.ن.ح (الشبه المنحرف)} = \frac{179.000 - 177.333}{177.333} = -0.94\,\%$$ (السالب يعني ان القيمة المقربة اكبر من الحقيقية)

$$\text{خ.ن.ح (السمبسون الثلث)} = 0\,\%$$

④ By using trapezoidal rule, evaluate:

Ⓐ $\int_0^4 (2-x^2)\,dx$; $h=1$ (−14.00) Ans.

Ⓑ $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx$; $h=0.1$ (1.0034) Ans.

Ⓒ $\int_1^2 x\cdot \ln x\,dx$; $h=0.1$ (0.63697) Ans.

⑤ By using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, evaluate:
where $h = 1$ for all

(A) $$\int_1^3 x^2 \cdot dx$$ (8.667) Ans.

(B) $$\int_0^2 x \cdot \sin x \cdot dx$$ (1.7282) Ans.

(C) $$\int_1^5 \frac{x}{\sin x} dx$$ (8.7159) Ans.

⑥ By using Newton forward formula, evaluate the value of the derivative of the following equation at $X = 6.6$, then find the true relative error:

$$f(x) = -46 + 45.4X - 13.8X^2 + 1.71X^3 - 0.0729X^4$$

$(X = 2 - 10 \; ; \; h = 2)$ (3D)

(% 37.182 = .ح.ن.٢ , $y'(6.6) \approx 1.730$) Ans.
(t.r.e. = $y''(6.6) \approx$)

⑦ Evaluate the value of the next integration by using the trapezoidal rule, then find the absolute relative error:

$$\int_0^{\frac{3\pi}{20}} [\sin(5x+1)] dx$$ $(N=4)$ work to 3D.P.

(% 2.640 = .ح.ن.٢ , $I = 0.303$, $I \approx 0.295$) Ans.
(a.r.e.)

⑧ By using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, Solve the following, then find the true relative error

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$ $N = 6$ & 2D

(0.00 % = .ح.ن.٢ , $I = \approx 2.00$) Ans.
(t.r.e)

قاعدة (3/8) لسمبسون (Simpson's ($3/8^{th}$) Rule)

أن عدد الشرائح فردي فمن الممكن استخدام قاعدة (3/8) لسمبسون. حيث تم هنا تقريب الدالة $f(x)$ بمعادلة تكعيبية والمساحة المحتوية على ثلاث شرائح يمكن أن تحسب بصورة مشابهة لاشتقاق القاعدة السابقة. إذ يمكن استخدام صيغة نيوتن الامامية لغاية الفرق الرابع والتكامل من (x_0) الى (x_3).

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} \Big\{ y_0 + u\cdot\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 \Big\}\,dx$$

حيث ان: $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ وبالتكامل وباستخدام:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

وبالتبسيط نحصل على الصيغة النهائية:

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_0 \right)$$

EX. 3 :- Use Simpson's ($3/8^{th}$) rule to evaluate $\int_0^1 x^4\,dx$, considering 6 strips.

So.:-

في البداية نحسب قيمة الفترة الجزئية (h):

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$$

ويمكن احتساب قيم y للقيم $x = 0$ الى $x = 1$) كما في الجدول التالي:

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
$y = x^4$	0	0.00077	0.01234	0.06251	0.1975	0.482253	1.0
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

وبتطبيق قاعدة (3/8) لسمبسون نحصل على:

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}\left[(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) \right]$$

$$= \frac{3h}{8}\left[y_0 + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2y_3 + y_6 \right] = 0.2022243$$

لاحظ ان القيمة الحقيقية للتكامل هي $x^5/5 \Big|_0^1 = 1/5 = 0.2$

التكامل للقطع غير متساوية المسافات (Integration With Unequal Segments)

لقد اعتمدنا في الصيغ السابقة لاحتساب التكامل العددي خلال مجال معين استنادا على ان اجزاء الفترة متساوية الابعاد. لكن هناك حالات كثيرة تكون اجزاء الفترة غير متساوية كما هي الحال في قراءات التجارب المختبرية على سبيل المثال. ففي هذه الحالة يمكن اعتماد طريقة شبه المنحرف لكل شريحة ومن ثم جمع النتائج الخاصة بالتكامل للحصول على التكامل الكلي خلال المجال وكما يلي :

$$I = h_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \cdots +$$

$$h_i \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2} \quad \cdots (1)$$

حيث ان : h_i هو عرض الشريحة ،

$$h_i = h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots, h_n$$

Ex. (4):- Use trapezoidal rule to determine the integral of data in the following table :

x	0	0.12	0.22	0.32	0.36	0.4	0.44	0.54	0.64	0.7	0.8
f(x)	0.2	1.310	1.305	1.443	1.575	2.156	2.243	2.507	2.482	2.363	2.232

Sol.:-

بتطبيق المعادلة (1) على البيانات في الجدول اعلاه نحصل على :

$$I = 0.12 * \frac{1.310 + 0.2}{2} + 0.1 * \frac{1.305 + 1.310}{2} + 0.1 * \frac{1.443 + 1.305}{2} + 0.04 *$$

$$\frac{1.575 + 1.443}{2} + 0.04 * \frac{2.156 + 1.575}{2} + 0.04 * \frac{2.243 + 2.156}{2} + 0.1 *$$

$$\frac{2.507 + 2.243}{2} + 0.1 * \frac{2.482 + 2.507}{2} + 0.06 * \frac{2.363 + 2.482}{2} + 0.1 * \frac{2.232 + 2.363}{2}$$

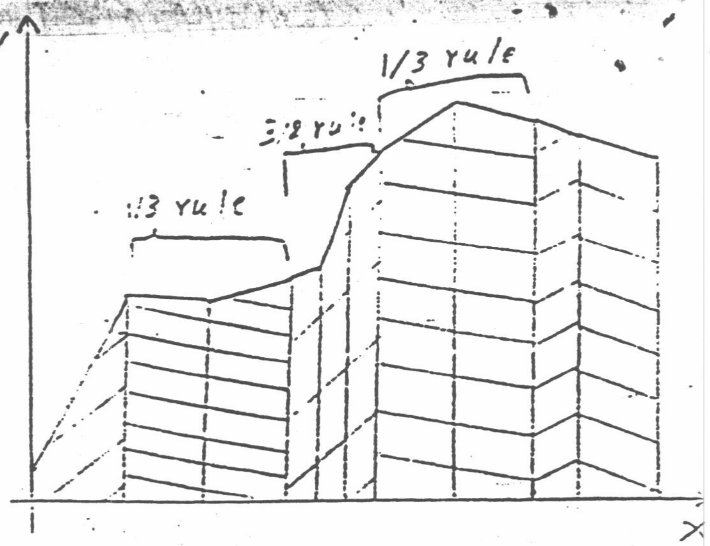
$$= 0.0905 + 0.1308 + 0.1374 + 0.0604 + 0.0746 + 0.0880$$

$$+ 0.2375 + 0.2495 + 0.1454 + 0.2298$$

$$= 1.4438$$

حيث يمكن [illegible]

ومن الجدير ملاحظة حول أن بعض الشرائح المتجاورة تكون متساوية العرض ($h = constant$) وتبعاً لذلك فانه يمكن ان تحسب باستخدام قاعدة سيمبسون وهذا يقود الى نتائج اكثر دقة وكما مبين في المثال التالي :



Ex. 5 :- Recompute the integral for the data in the Ex. 4 using Simpson's rules:

Sol.:-

الشريحة الاولى يمكن أن تحسب باستخدام قاعدة شبه المنحرف هكذا :

$$I_1 = 0.12 * \frac{1.310 + 0.2}{2} = 0.0906$$

وبما أن الشريحتين الثانية والثالثة هما ذات مسافات متساوية ، اذن بالامكان تطبيق قاعدة الثلث لسيمبسون هكذا :

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{0.32 - 0.12}{2} = 0.1$$

$$\therefore I_2 = \frac{h}{3}[f(0.12) + 4f(0.22) + f(0.32)]$$

$$= \frac{0.1}{3}[1.310 + 4(1.305) + 1.443] = 0.2658$$

وبما ان الشرائح الثلاث الاخرى هي ايضاً متساوية المسافات ، اذن بالامكان احتساب التكامل بتطبيق قاعدة (3/8) لسيمبسون هكذا :

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{0.44 - 0.36}{3} = 0.0267$$

$$\therefore I_3 = \frac{3h}{8}[f(0.36) + 3f(0.4) + f(0.44)]$$

$$= \frac{3 * 0.0267}{8}[1.575 + 3 * 2.156 + 2.243] = 0.1030$$

وكذلك يمكن احتساب التكامل للشريحتين السابعة والثامنة باستخدام قاعدة (1/3) لسيمبسون هكذا :

$$I_4 = \frac{0.1}{3}[2.243 + 4 * (2.507) + 2.482] = 0.4918$$

واخيراً يمكن احتساب تكامل الشريحتين الاخيرتين كل على حدة باستخدام طريقة شبه المنحرف والتي نحصل : $I_5 = 0.1454$ و $I_6 = 0.2298$ وبذلك فان المساحة الكلية هي حاصل جمع المساحات المنفردة :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 1.3264$$

٣- التكاملات المتعددة (Multiple Integrals)

يتم التعامل مع التكاملات المتعددة عددياً عن طريق ايجاد التكامل الداخلي بإحدى الصيغ التكاملية السابقة ومن ثم ايجاد التكامل الخارجي، كما في التكامل المزدوج أدناه :

$$\iint_A f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

حيث ان المنطقة (A) محصورة بين $x=a$ ، $x=b$ و $y=c$ ، $y=d$. حيث يتم تثبيت (x) ويتم التكامل نسبة الى (y) أو العكس. ويبين المثال التالي كيفية ايجاد التكامل المزدوج عددياً.

Ex. (6):- Evaluate the double integral:

$$\int_{0.2}^{0.6}\int_{1.5}^{3} f(x,y)\,dx\,dy$$ and $f(x,y)$ as given in the following table :

x \ y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

Sol.:- المجال المحدد بـ $y=0.6$ ، $y=0.2$ و $x=3.0$ ، $x=1.5$ ، فيكون الحل مثلاً بتطبيق قاعدة شبه المنحرف في الاتجاه (x) وقاعدة الثلث لسمبسون في الاتجاه (y) ونبدأ بتثبيت (y) لنحصل على :

$$\text{at } y=0.2 \Rightarrow \int_{1.5}^{3.0} f(x,y)\,dx = \int_{1.5}^{3.0} f(x,0.2)\,dx = \frac{h}{2}\left(f_1+2(f_2+f_3)+f_4\right)$$

$$\therefore I_{x\,at\,y=0.2} = \frac{0.5}{2}\left[0.990+2(1.568+2.520)+4.090\right] \simeq 3.3140$$

$$\& \; I_{y=0.3} = \frac{0.5}{2}\left[1.524+2(2.384+3.800)+6.136\right] \simeq 5.0070$$

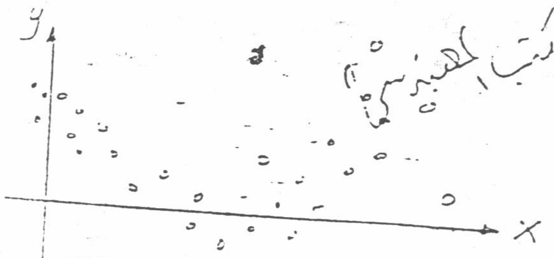
[illegible] $= 8.2368$ & $I_{y=0.6} = 9.7435$

$\therefore I_{y=}$ [illegible]

$$\therefore \int_{0.2}^{0.6} f(x,y)\,dy = \frac{0.1}{3}\left[3.3140+4(5.0070+8.2368)+2(6.6522)+9.7435\right]$$
$$= 2.6446$$

تطابق المنحنيات (Curves Fitting)

عرفنا سابقاً ان الاستكمال يستخدم لمعالجة وايجاد دالة لقيم جدولية بشكل جدول على ان تكون هذه القيم مضبوطة وخالية من الاخطاء ، وهذه الدالة تمر في كل نقطة من نقاط الجدول ، والذي كان يؤثر على النتائج هو اخطاء التدوير فقط ولكن اذا كان الجدول هو نتيجة لبعض تجارب العملية فستحتوي قيم الجدول بحد ذاتها على اخطاء متأصلة لا يمكن تجاوزها ومن الممكن ان تكون هذه الاخطاء كبيرة جداً نتيجة القياسات المعقدة ، فمثلاً من تجربة معينة لو حصلنا على جدول مكون من بيانات (X, Y)



كما في الشكل ، ما واضح من هذه القيم تحتوي على اخطاء لذا يجب علينا التخلص من هذه الاخطاء قدر الامكان قبل ان يكون بإمكاننا استعمال هذه البيانات .

ولأجل ذلك يجب ايجاد اسلوب لاستعمال البيانات في انتاج صيغة للعلاقة بين (X و Y) ، هذا الاسلوب هو ايجاد دالة بسيطة توضح لكل المجرى الكامل للجدول لكن هذه الدالة لا تحقق كل نقطة من نقاط الجدول بصورة مضبوطة وهذا ما يعرف بتطابق المنحنيات ومن ثم نعمل على تقليل الخطأ بين الدالة البسيطة وقيم البيانات المجدولة ويكون ذلك بالبحث عن الدالة التقريبية والتي يكون فيها مجموع المربعات للفرق بين الدالة والبيانات الحقيقية هو أقل ما يمكن ويعرف هذا الاسلوب بطريقة المربعات الصغرى (The method of least squares) والتي سيتم مناقشتها في هذا الفصل وسنكتفي بالتطرق الى الانحدار الخطي وتطبيقاته والانحدار متعدد الحدود .

الانحدار الخطي (Linear Regression)

إن ابسط النموذج لتقريب المربعات الصغرى هو تطابق خط مستقيم لمجموعة نقاط مجدولة ، والتعبير الرياضي للخط المستقيم يكون بصيغة :

$$\bar{y} = a_0 + a_1 X \quad ---- (1)$$

حيث ان (a_0 و a_1) هما معاملان يمثلان نقطة التقاطع والميل على التوالي .

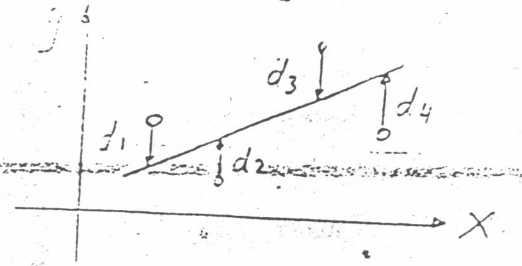
بسبب الاخطاء التي لا يمكن تجنبها خلال اجراء أي تجربة فان النقاط المجدولة

... لا تقع كلها على الخط المستقيم وسوف يكون بالإمكان ... إيجاد خط

يمر قدر الإمكان بالقرب من النقاط. إذ يمكن تعريف الانحراف (d)

($Deviation$) وكما في الشكل، بأنه الفرق بين قيم (y) المختبرية وقيم ($\bar{y}$)

النقاط الواقعة على الخط المستقيم أي إن:



$$d = y - \bar{y}$$

على فرضنا وجود (m) من القيم المجدولة

($x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$) وتناظرها ($m$)

قيمة ($y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m$) فتكون الانحرافات إذن:

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= y_1 - \bar{y}_1 = y_1 - f(x_1)\\
d_2 &= y_2 - \bar{y}_2 = y_2 - f(x_2)\\
d_3 &= y_3 - \bar{y}_3 = y_3 - f(x_3)\\
&\;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
d_m &= y_m - \bar{y}_m = y_m - f(x_m)
\end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

يتضح من المعادلة (2) بأن أفضل تطابق للقيم مع الخط المستقيم هو عندما تكون كل من الانحرافات ($d_1, d_2, \cdots, d_m$) تساوي أقل ما يمكن، وكما هو معروف لدينا أنه لا يمكن أن نأخذ مجموع قيم الانحرافات ($\sum m d_i$) لأن بعض هذه القيم موجبة والأخرى سالبة فيكون الناتج الكلي صفراً نسبة إلى الخط الأفضل للتطابق، ولتجاوز الإشارات السالبة نأخذ مجموع مربعات قيم الانحرافات (S) (Sum of Square of Deviations Values)

أي إن:

$$S = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \bar{y}_i)^2 \cdots (3)$$

حيث إن (m) تمثل عدد النقاط، وبما أن $\bar{y} = a_0 - a_1 x$ لذا فإن:

$$S = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \cdots (4)$$

وبعدها نحصل على إيجاد قيم (a_0, a_1) التي تجعل قيمة (S) في المعادلة (4) أقل ما يمكن ويكون ذلك بالتفاضل الجزئي نسبة إلى (a_0) تارة ثم إلى (a_1) تارة أخرى والمساواة إلى الصفر وكما يلي:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \cdots (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum \left[(y_i - a_0 - a_1 x_i)\, x_i \right] = 0 \cdots (6)$$

وبإعادة ترتيب الحدود في المعادلتين السابقتين نحصل :

$$ma_0 + (\sum x_i) a_1 = \sum y_i \quad \text{---} (7)$$

$$(\sum x_i) a_0 + (\sum x_i^2) a_1 = \sum x_i y_i \quad \text{---} (8)$$

حيث أن : (m) هو عدد النقاط و $\sum a_0 = m a_0$

وبحل المعادلتين (7) و (8) ~~آنياً باستخدام طريقة الحذف والتعويض~~ أي طريقة من الطرق السابقة نستطيع حساب قيم (a_0 , a_1) وكما يلي :

$$a_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \text{---} (9)$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \text{---} (10)$$

Ex. ① :- Use linear regression to fit the following experimental data :

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

Sol. :- نفترض دالة خطية بالصيغة $(y = a_0 + a_1 x)$ حيث أن (a_0 , a_1) يمكن إحتسابها باستخدام المعادلتين (9) و(10) ، ويمكن حساب الانحدار الخطي من خلال استخدام القيم المؤشرة في الجدول التالي :

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1	1
2	3	2	9	6
3	4	4	16	16
4	6	4	36	24
5	8	5	64	40
6	9	7	81	63
7	11	8	121	88
8	14	9	196	126
$\sum$	56	40	524	364

وبعد تعويض الـ (Sums) في المعادلتين (9) و (10) ولعدد $(m = 8)$ نحصل على :

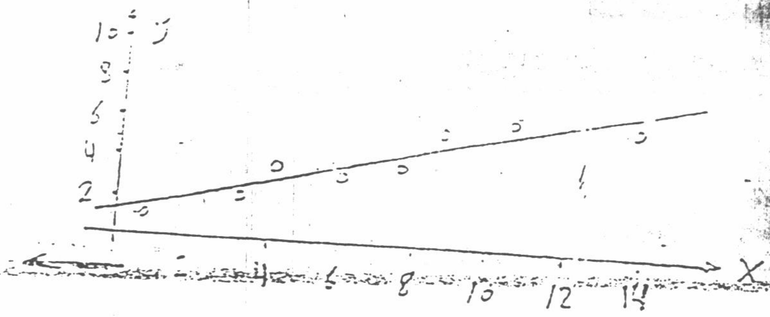
$$a_0 = \frac{40 * 524 - 56 * 364}{8 * 524 - (56)^2} = \frac{6}{11}$$

$$a_1 = \frac{8 * 364 - 56 * 40}{8 * 524 - (56)^2} = \frac{7}{11}$$

ونتيجة لذلك يمكن اعتبار العلاقة الخطية المفترضة والتي تعطي أنه تطابق

المجدولة وتكون معادلة الانحدار

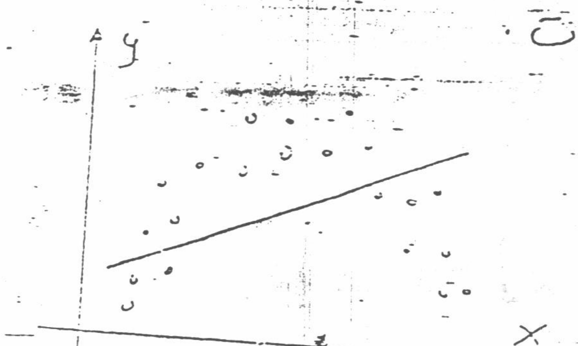
$$y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}x \quad i.e\ 11y - 7x = 6$$



الآن يمكن ملاحظة النقاط المجدولة والانحدار الخطي في الشكل (X, Y)

تطبيقات الانحدار الخطي:

يعتبر الانحدار الخطي أسلوب مناسب وجيد لتمثيل أحسن خط للبيانات المجدولة من جهة والمتغير المعتمد والمتغير المستقل من جهة أخرى فيما إذا كانت العلاقة بينهما خطية، أما إذا لم تكن العلاقة خطية فإن هذا الأسلوب يكون غير مناسب ويمكن استعمال أساليب أخرى تكون أكثر ملائمة مثل استخدام الانحدار متعدد الحدود والذي سيتم مناقشته لاحقاً، كما مبين في الشكل أدناه والذي نلاحظ بأن تصرف البيانات يكون بشكل منحني وعليه فإن وضع الانحدار الخطي يكون غير مناسب بينما يكون وضع الانحدار متعدد الحدود مناسباً أكثر. لذا فإن الخطوة الأولى في أي تحليل للانحدار هو رسم وملاحظة تصرف البيانات بعدها يتم اختيار الأسلوب المناسب لتحليل الانحدار لتلك البيانات:



من ناحية أخرى، فإن هنالك تحويرات لبعض المعادلات غير الخطية الشائعة كي تكون متلائمة مع الانحدار الخطي وكما يلي:

أ- معادلة الصدد الطبيعي (Exponential Equation)

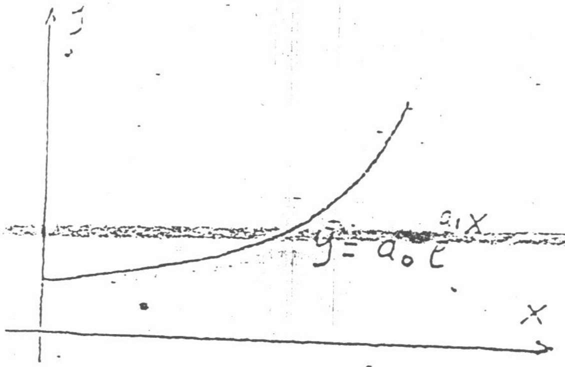
$$y = a_0 \cdot e^{a_1 x}$$

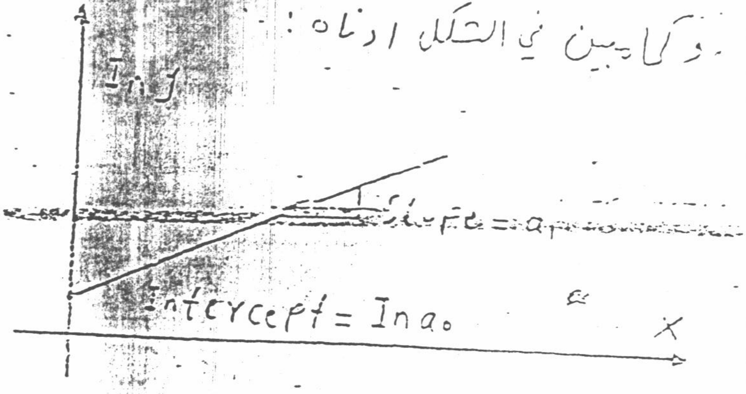
حيث أن a_0 و a_1 هي ثوابت، يمكن تحويل المعادلة أعلاه إلى معادلة خطية بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فينتج:

$\Rightarrow \ln y = \ln a_0 + a_1 x$

وبرسم ($\ln y$) مع (x) سينتج خط مستقيم مع ميل (a_1) ونقطة تقاطع ($\ln a_0$)

وكما مبين في الشكل ادناه:





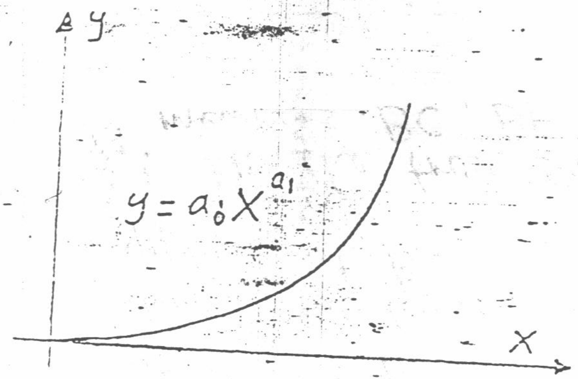
ب- معادلة الرفع الى قوة (Power Equation)

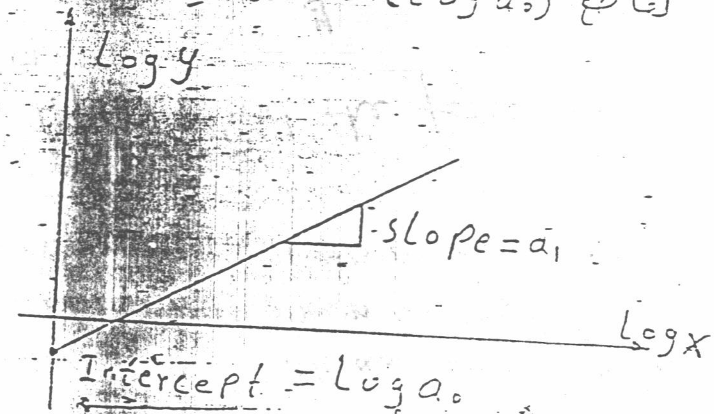
$$y = a_0 x^{a_1}$$

يمكن اعتبار نفس الاسلوب السابق وذلك بأخذ اللوغاريتم للطرفين فنحصل على:

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x$$

وعند ثم نرسم ($\log y$) مع ($\log x$) حيث سينتج خط مستقيم ذو ميل (a_1) ونقطة تقاطع ($\log a_0$) وكما مبين في الشكل أدناه:





جـ- معادلة معدل النمو (Growth-Rate Equation)

$$y = a_0 \frac{x}{a_1 + x}$$

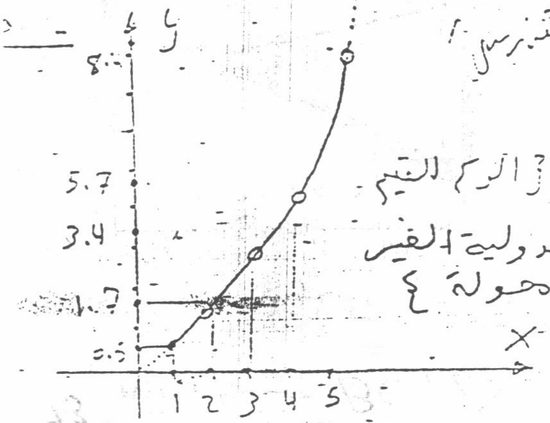
حيث أن a_0 و a_1 هي معاملات ثابتة ويتم تحويل المعادلة اعلاه الى معادلة خطية بالشكل التالي:

$$\frac{1}{y} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{a_0}$$

لهذا فعند رسم ($1/y$) مع ($1/x$) سوف يكون الرسم خطياً مع ميل ($\frac{a_1}{a_0}$) ونقطة تقاطع ($\frac{1}{a_0}$)، وكما في الشكل التالي:

② Fit the data in the following table using the Logarithmic transformation of the data:

x	1	2	3	4	5
y	0.5	1.7	3.4	5.7	8.4



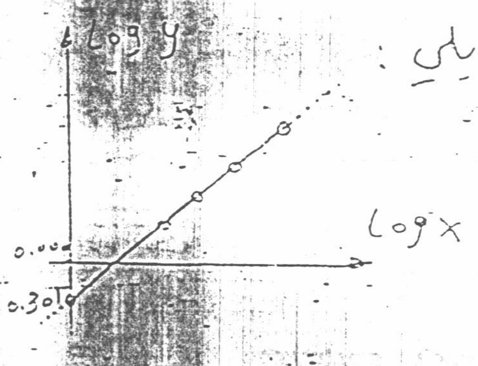
نعتبر للتدريس :
القيم الجدولية الغير محولة

يتم اولاً رسم الجدول بين (x) و (y) لمعرفة العلاقة التقريبية بينهما والاعتماد عليها في الحل

حيث نلاحظ بأنها علاقة لوغاريتمية حيث يمكن الحصول على (log x) و (log y) حيث يمكن استخدامها في معادلة القوة وتم حسابها في الجدول التالي :

x	y	Log x	Log y
1	0.5	0.000	−0.301
2	1.7	0.301	0.226
3	3.4	0.477	0.534
4	5.7	0.602	0.753
5	8.4	0.699	0.922

والآن لو تم رسم العلاقة للقيم المحولة أي بين (log x) و (log y) نلاحظ أنها تكون خطية وكما يلي :



والآن ولأجل ايجاد العلاقة الخطية بين (log x) و (log y) يجب ايجاد (a_0) و (a_1) أولاً بالمعادلتين (9) و (10) بعد عمل جدول الـ (Sums) وتعويضهما في المعادلة الخطية :

$$\log y = \log a_0 + a_1 \log x$$

i	X	y	$\log X$	$\log y$	$(\log x)^2$	$(\log x)(\log y)$
1	1	0.5	0.000	-0.301	0.000	0.000
2	2	1.7	0.301	0.226	0.091	0.068
3	3	3.4	0.477	0.534	0.228	0.255
4	4	5.7	0.602	0.753	0.362	0.453
5	5	8.4	0.699	0.922	0.489	0.644
$\sum$			2.079	2.134	1.170	1.420

$$\log a_0 = \frac{2.134 \times 1.170 - 2.079 \times 1.42}{5 \times 1.170 - (2.079)^2} = -0.298$$

&

$$a_1 = \frac{5 \times 1.420 - 2.079 \times 2.134}{5 \times 1.170 - (2.079)^2} = 1.743$$

حسب المتقدم

إذن الانحدار الخطي بقيم المحولة لوغارتمياً يعطي ما يلي:

$$\log y = 1.743 \log X - 0.298$$

من التقاطع نحصل على $(\log a = -0.298)$ ومن ثم $(a = 0.504)$ وان الانحدار $(b = 1.743)$، وعلى ضوء ذلك تكون معادلة القوة هكذا:

$$y \approx 0.504\, X^{1.743} = 0.5\, X^{1.75}$$

الانحدار متعدد الحدود (Polynomial Regression)

يمكن وضع اسلوب المربعات الصغرى لتطابق البيانات لمتعدد الحدود من الدرجة (n)

$$y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

حيث يكون مجموع مربعات الانحرافات للحدود الحالية كما يلي:

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_0 - a_1 X_i - a_2 X_i^2 - \cdots - a_n X_i^n)^2$$

وبنفس الاسلوب السابق، حيث توجد المشتقة الجزئية للمعادلة اعلاه نسبة الى كل المعاملات المجهولة لمتعدد الحدود ثم المساواة الى الصفر وكما يلي:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 X_i - a_2 X_i^2 - \cdots - a_n X_i^n) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum X_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 X_i^2 - \cdots - a_n X_i^n) = 0$$

$$= -2\sum x_i^{2}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_n x_i^n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_n} = -2\sum x_i^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_n x_i^n) = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود تنتج مجموعة المعادلات التالية :

$$m a_0 + a_1\sum x_i + a_2\sum x_i^2 + \dots + a_n\sum x_i^n = \sum y_i$$

$$a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + a_2\sum x_i^3 + \dots + a_n\sum x_i^{n+1} = \sum x_i y_i$$

$$a_0\sum x_i^2 + a_1\sum x_i^3 + a_2\sum x_i^4 + \dots + a_n\sum x_i^{n+2} = \sum x_i^2 y_i$$

$$\vdots$$

$$a_0\sum x_i^n + a_1\sum x_i^{n+1} + a_2\sum x_i^{n+2} + \dots + a_n\sum x_i^{2n} = \sum x_i^n y_i$$

حيث ان كل مجموع ($\sum$) هو من ($i=1$) الى ($i=m$) وبذلك نحصل على عدد من المعادلات بقدر عدد المجاهيل وبحل هذه المعادلات آنياً باستخدام أي طريقة من طرق حل المعادلات الجبرية الخطية الآنية نحصل على المعاملات الجبرية التي درسناها لحل المعادلات ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$)

Ex(3).: Fit a second-order polynomial to the data in the following table:

X	0	1	2	3	4	5
y	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

Sol.:

يمكن الحصول على الآتي من القيم الجدولية المعطاة :

$n = 2$, $m = 6$, $\sum x_i = 15$, $\sum y_i = 152.6$

$\sum x_i^2 = 55$, $\sum x_i^3 = 225$, $\sum x_i^4 = 979$, $\sum x_i y_i = 585.6$

$\sum x_i^2 y_i = 2488.8$

إذن ستكون المعادلات الجبرية الخطية الآنية هكذا :

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152.6$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585.6$$

$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 2488.8$$

وبعد حل هذه المعادلات بطريقة الحذف لكاوس نحصل على :

$a_0 = 2.47857$; $a_1 = 2.35929$ & $a_2 = 1.86071$

إذن ستكون المعادلة للانحدار متعدد الحدود هكذا :

$$y = 2.47857 + 2.35929X + 1.86071X^2$$

الفصل الرابع

الفصل الرابع

حلول المعادلات التفاضلية الاعتيادية

(Solutions of Ordinary Differential Equation)

مقدمة :-

المقصود بحل اي معادلة تفاضلية هو ايجاد دالة (Function) بإمكانها تحقيق المعادلة التفاضلية وكذلك بإمكان هذه الدالة تحقيق بعض الشروط الابتدائية والحدودية . ويتمثل الحل هذا بإيجاد حل عام لهذه المعادلة حاوياً على ثوابت يمكن إيجاد قيمها من الشروط الابتدائية والحدودية .

في هذا الفصل سيتم التطرق الى حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بالطرق العددية . وان هذه الطرائق لا تُحدد بصيغة قياسية ، ويتم التطرق الى طريقة حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى ومن ثم كيف نستخدم نفس الطريقة في حل مجموعة المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى .

ان الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى تكون بالشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

هناك طرق كثيرة ومتنوعة لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية مثل طريقة الفروق المحددة التي لن يتم التطرق اليها، ولكننا سوف نأخذ تلك التي تعطينا الحل التقريبي لمشتقة من الدرجة الاولى والتي تعتمد على اساس القيمة الابتدائية (Initial Value Problems) والتي تتواجد فيها قيمة $(y(x_0) = y_0)$ وخاصة النوع الاول والذي يعتمد الخطوة المنفردة والنوع الثاني والذي يعتمد الخطوات المتعددة .

ومن أهم الطرق لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية :

اولاً :- طريقة متسلسلة تايلور (Taylor Series Method)

تنص هذه الطريقة باختصار على ايجاد الدالة (y) بجوار النقطة $(x = x_0)$ والتي تبعد بمسافة (h) ، حيث ان :

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}\cdot y'(x) + \frac{h^2}{2!}\cdot y''(x) + \frac{h^3}{3!}\cdot y'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^n(x)$$

وكما قلنا في هذه الطرق يجب توفر الشروط عند اول نقطة $(y(x_0))$ ، وسيكون الحل للمشتقة الرابعة مثلاً .

Ex.①:- Find the numerical solution of the following by using Taylor series method!

$$\frac{dy}{dx} = x+y \quad \text{و} \quad \boxed{y(x_0) = y_0 = 1} \text{ for } x = \underset{x_0}{0} \ \underset{h}{(0.1)} \ \underset{x_1}{0.1}$$

الدالة عند اول نقطة

Sol.:-

نلاحظ أن البداية $(x=0)$ ولغاية $(x=0.1)$ وبمسافة $(h=0.1)$ اي ان الحل تطبيق لمرة واحدة .

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}\cdot h + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}\cdot h^3 + \frac{y^{IV}(x_0)}{4!}\cdot h^4$$

للحصول على $y(x)$ عند $(x_1 = x_0 + h)$ يجب ان نجد المشتقات :

$$y' = x+y \Rightarrow y'(x_0) = x_0 + y(x_0) = 0+1 = 1$$

$$y'' = 1+y' \Rightarrow y''(x_0) = 1 + y'(x_0) = 1+1 = 2$$

$$y''' = 0+y'' \Rightarrow y'''(x_0) = y''(x_0) = 2$$

$$y^{IV} = y''' \Rightarrow y^{IV}(x_0) = y'''(x_0) = 2$$

$$\therefore y_{(0.1)} = 1 + \frac{1}{1} * 0.1 + \frac{2}{2*1} * (0.1)^2 + \frac{2}{3*2*1} * (0.1)^3 + \frac{2}{4*3*2*1} * (0.1)^4$$

$$= 1 + 0.1 + 0.01 + 0.000333 + 0.000008$$

$$= 1.110341$$

Ex.②:- Resolve Ex.① , take $h = 0.02$ و $x = 0(0.02)0.1$

$$\frac{x_n - x_0}{h} = \frac{0.1-0}{0.02} = 5$$

لاحظ ان عدد مرات التطبيق ستكون :

$$\therefore y_{(x_n)} = y_{(x_{n-1})} + \frac{y'(x_{n-1})}{1!}\cdot h + \frac{y''(x_{n-1})}{2!}\cdot h^2 + \frac{y'''(x_{n-1})}{3!}\cdot h^3 + \frac{y^{IV}(x_{n-1})}{4!}\cdot h^4$$

اول تطبيق سيكون لـ $y(x_1)$ حيث ان :

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.02 = 0.02$$

$$y' = x+y \Rightarrow y'(x_0) = x_0 + y(x_0) = 0+1 = 1$$

$$y'' = 1+y' \Rightarrow y''(x_0) = 1 + y'(x_0) = 1+1 = 2$$

$$y''' = 0+y'' \Rightarrow y'''(x_0) = y''(x_0) = 2$$

$$y^{IV} = y''' \Rightarrow y^{IV}(x_0) = y'''(x_0) = 2$$

$\therefore y(0.02) = 1 + \frac{1}{1} * (0.02) + \frac{2}{2} * (0.02)^2 + \frac{2}{6} * (0.02)^3 + \frac{2}{24} * (0.02)^4$

$= 1.0204$

ثانياً تطبيق سيكون لـ $y(X_2)$ حيث ان :

$X_2 = X_1 + h = 0.02 + 0.02 = 0.04$

$y(x_2) = y(x_1) + y'(x_1) \cdot h + \frac{y''(x_1)}{2} \cdot h^2 + \frac{y'''(x_1)}{6} \cdot h^3 + \frac{y^{IV}(x_1)}{24} \cdot h^4$

$y(x_1) = 1.0204$

$y'(x_1) = x_1 + y(x_1) = 0.02 + 1.0204 = 1.0404$

$y''(x_1) = 1 + y'(x_1) = 1 + 1.0404 = 2.0404$

$y'''(x_1) = 0 + y''(x_1) = 2.0404$

$y^{IV}(x_1) = y'''(x_1) = 2.0404$

$\therefore y(0.04) = 1.0204 + 1.0404 * (0.02) + \frac{2.0404}{2} * (0.02)^2 +$

$\frac{2.0404}{6} * (0.02)^3 + \frac{2.0404}{24} * (0.02)^4$

$= 1.0416$

ثالثاً تطبيق سيكون لـ $y(X_3)$ حيث ان :

$X_3 = X_2 + h = 0.04 + 0.02 = 0.06$

$y(x_3) = y(x_2) + y'(x_2) \cdot h + \frac{y''(x_2)}{2} \cdot h^2 + \frac{y'''(x_2)}{6} \cdot h^3 + \frac{y^{IV}(x_2)}{24} \cdot h^4$

$y(x_2) = 1.0416$

$y'(x_2) = x_2 + y(x_2) = 0.04 + 1.0416 = 1.0816$

$y''(x_2) = 1 + y'(x_2) = 1 + 1.0816 = 2.0816$

$y'''(x_2) = y''(x_2) = 2.0816$

$y^{IV}(x_2) = y'''(x_2) = 2.0816$

$\therefore y(0.06) = 1.0416 + 1.0816 \cdot (0.02) + \frac{2.0816}{2} \cdot (0.02)^2 + \frac{2.0816}{6} * (0.02)^3$

$+ \frac{2.0816}{24} * (0.02)^4$

$= 1.0636$

$y(x_3) = 1.0636 \Rightarrow x_4 = x_3 + h = 0.06 + 0.02 = 0.08$

$y'(x_3) = 0.06 + 1.0636 = 1.1236$ & $y''(x_3) = 1 + 1.1236 = 2.1236$

& $y'''(x_3) = 2.1236 = y^{IV}(x_3) \Rightarrow$

$$y(x_4) = y(0.08) = 1.0865$$

وآخر مرحلة هو : $x_5 = 0.1$

$y(x_4) = 1.0865$ & $y'(x_4) = 1.1665$ & $y''(x_4) = 2.1165$ &

$y'''(x_4) = 2.1165$ & $y^{IV}(x_4) = 2.1665$

$$\therefore\ y(x_5) = y(0.1) = 1.1103$$

يمكننا عمل جدول لمعرفة مدى دقة هذه الطريقة :

X_n	الدالة الحقيقية $y_n = 2e^x - x - 1$	قيمة الدالة بطريقة متسلسلة تايلور
0	1.0	1.0
0.02	1.0204	1.0204
0.04	1.0416	1.0416
0.06	1.0636	1.0636
0.08	1.0865	1.0865
0.1	1.11031	1.1103

ان الدالة :

$$y = 2e^x - x - 1$$

هي تكامل الدالة التفاضلية :

$$y' = x + y$$

لاحظ بالتطبيق مرة واحدة فأن قيمة الدالة كانت :
(1.110341)

ثانياً :- طريقة رونج - كوتا (Runge - Kutta Method)

تعتبر هذه الطريقة اكثر تطوراً بالدقة من الطريقة السابقة وتعود هذه الطريقة الى العالمان الالمانيان رونج وكوتا، حيث يجب توفر الشروط الابتدائية $y(x_0)$ ايضاً. ودون الدخول الى تفاصيل الاشتقاق فأن الصيغة الرياضية لرونج - كوتا ذات الرتبة الرابعة الشائعة الاستعمال هي :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$

حيث ان :

$$K_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = h \cdot f(x_n + h/2,\ y_n + K_1/2)$$

$$K_3 = h \cdot f(x_n + h/2,\ y_n + K_2/2)$$

$$K_4 = h \cdot f(x_n + h,\ y_n + K_3)$$

وباختصار فأن التفسير الهندسي لهذه الطريقة هو ان الانحدارات (الميول) الاربعة (K_1/h و K_2/h و K_3/h و K_4/h) يؤخذ المعدّل الموزون لها وهي (1/6 و 2/6 و 2/6 و 1/6) على التوالي ويستعمل الميل المعدّل هذا في حساب قيمة (y_{n+1}).

Ex. 3 :- Solve the differential equation in Ex. 1 by using Runge-Kutta method:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \; ; \; y_{(0)} = 1 \; ; \; x = \underset{x_1}{0}(\overset{h}{0.1})\underset{x_2}{0.1}$$

Sol. :-

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n) = h * [x_0 + y_0]$$
$$= 0.1 * [0 + 1] = 0.1 \qquad (x, y)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) = h * [(x_0 + \frac{h}{2}) + (y_0 + \frac{k_1}{2})]$$
$$= 0.1 * [(0 + \frac{0.1}{2}) + (1 + \frac{0.1}{2})] = 0.1 * [0.05 + 1.05] = 0.11$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) = h * [(x_0 + \frac{h}{2}) + (y_0 + \frac{k_2}{2})]$$
$$= 0.1 * [(0 + \frac{0.1}{2}) + (1 + \frac{0.11}{2})] = 0.1 * [0.05 + 1.055] = 0.1105$$

$$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) = h * [(x_0 + h) + (y_0 + k_3)]$$
$$= 0.1 * [(0 + 0.1) + (1 + 0.1105)] = 0.1 * [0.1 + 1.1105] = 0.12105$$

$$\therefore y_{(0.1)} = 1 + \frac{1}{6}[0.1 + 2*(0.11) + 2*(0.1105) + 0.12105$$
$$= 1.11034$$

بما ان المعادلة بسيطة فان الفرق بين الطريقتين سيكون قليل جداً كما هو واضح .

$y_{(0.1)} = \quad x_0 = 0.1 \quad y_0 = 1.11034$

Ex. 4 :- what will be the answer if we take two steps?

$$y' = x + y \; ; \; y_0 = 1 \; , \; x = 0(\overset{h}{0.05})\underset{x_0}{0.1}$$

Sol. :-

المرحلة الاولى :

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.05 * [0 + 1] = 0.05$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.05 * [(0 + \frac{0.05}{2}) + (1 + \frac{0.05}{2})] = 0.0525$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.05 * [(0 + \frac{0.05}{2}) + (1 + \frac{0.6525}{2})] = 0.05256$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.05 * [(0 + 0.05) + (1 + 0.05256)] = 0.05513$$

وبذلك يمكن ايجاد $y_{(0.05)}$ حيث ان :

$$y(0.05) = y(0) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$
$$= 1 + \frac{1}{6}[0.05 + 2(0.0525) + 2(0.05256) + 0.05513]$$
$$= \underline{1.05254}$$

والمرحلة الثانية:

$$y(0.1) = y(0.05) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \Rightarrow$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.05 \cdot [0.05 + 1.05254] = 0.05513$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0.05 \times [(0.05 + \frac{0.05}{2}) + (1.05254 + \frac{0.05513}{2})] = 0.0577$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}) = 0.05 \times [(0.05 + \frac{0.05}{2}) + (1.05254 + \frac{0.05776}{2})] = 0.0578$$

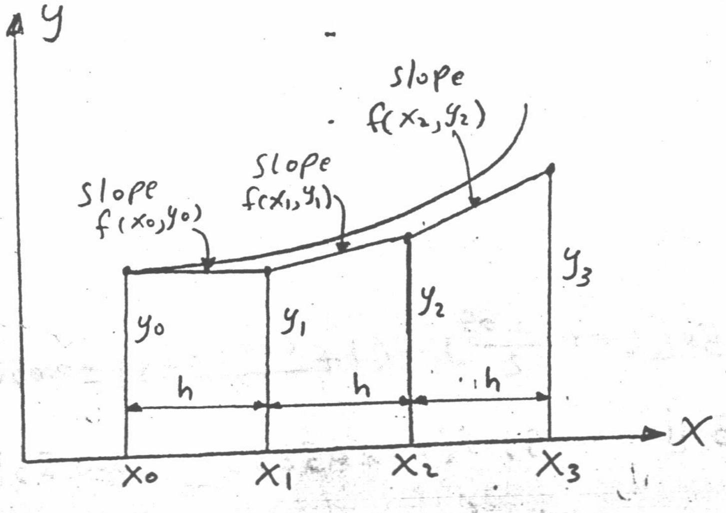
$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.05 \times [(0.05 + 0.05) + (1.05254 + 0.05782)] = 0.0605$$

$$\therefore y(0.1) = 1.05254 + \frac{1}{6}[0.05513 + 2(0.05776) + 2(0.05782) + 0.0605]$$
$$= 1.1103413$$

ثالثاً :- طريقة أويلر (Euler Method)

تتمثل هذه الطريقة للحل التكاملي بالبدء عند النقطة المعرفة والتقدم خطوة خطوة باتجاه مجال التكامل للدالة .

وتعتبر هذه الطريقة أبسط الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية . حيث أن الحل يعتمد على تقسيم مجال الحل التكاملي الى خطوات متعددة ذات عرض (h) على طول الاحداثي (X) ، كما مبين في الشكل أدناه :



نرى في الشكل ابتعاد الحل العددي (التقريبي) عن المنحني الصحيح (Exact) ، إذ يمكن القول بأن هذه الطريقة غير قادرة على إعطاء الحلول المضبوطة مهما كانت قيمة (h) صغيرة جداً .

والقاعدة المتبعة لاحتساب الدالة (y) عند أي قيمة لـ (x) من خلال متسلسلة تايلور هي :

$$y_{(x+h)} = y_{(x)} + h \cdot y'_{(x)} + \frac{h^2}{2!} y''_{(x)} + \frac{h^3}{3!} y'''_{(x)} + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^n_{(x)} \quad \cdots (1)$$

فلو أفترضنا قيمة (h) صغيرة جداً فأن قيمة ($h^2, h^3, h^4, \ldots, h^n$) تصبح صغيرة جداً خاصة وأنها تقسم على المقام، وبذلك يمكن اهمال المعاملات من الدرجة الثانية وأكثر وبذلك تختزل متسلسلة تايلور الى حدين فقط وكما يلي :

$$y_{(x+h)} = y_{(x)} + h\, y_{(x)} \quad \cdots (2)$$

وهذه هي المعادلة التي تم افتراضها من قبل أويلر في طريقته العددية المبسطة في حين يمكن التنويه أن بالامكان استخدام المعادلة (1) بتفاصيلها ولكن من الصعوبة تضمين جميع مشتقات الدالة وحدودها المتصورة. واعتماداً على المعادلة (2) يمكن ايجاد قيم (y) على طول مجال التكامل العددي وكما يلي :

$$Slope = f(x_0, y_0) = y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

اذن بالامكان الحصول على (y_1) ما قيمة (y_0) والمشتقة (y') عند (x_0, y_0):

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'$$

$$\therefore \quad at \quad x = x_1 \implies y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$at \quad x = x_2 \implies y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$\vdots$$

$$at \quad x = x_n \implies y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

أو بشكل عام :

$$y_{r+1} = y_r + h \cdot f(x_r, y_r) \quad \cdots (3)$$

حيث أن : $r = 0, 1, 2, \ldots n$ وأن :

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$\vdots$$

$$x_{r+1} = x_0 + r \cdot h = x_r + h$$

Ex. (5) :- Use Euler's simple method to obtain an approximate numerical solution of the ordinary differential equation : $\frac{dy}{dx} = y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2} y$

with $y = 4$ at $x = 0$, for $x = 0(0.05)0.25$, work to four decimal places.

Sol:-

$$\boxed{y_{r+1} = y_r + h\, f(x_r, y_r)}$$ حفظ

$$y_{r+1} = y_r + 0.05\left(x_r^2 + 4x_r - \tfrac{1}{2} y_r\right)$$

$$\therefore y_1 = y_0 + 0.05\left(x_0^2 + 4x_0 - \tfrac{1}{2} y_0\right) = 4 + 0.05\left(0 + 4(0) - \tfrac{1}{2}(4)\right) = 3.9$$

$$\& \; y_2 = 3.9 + 0.05\left(0.05 + 4(0.05) - \tfrac{1}{2}(3.9)\right) = 3.81$$

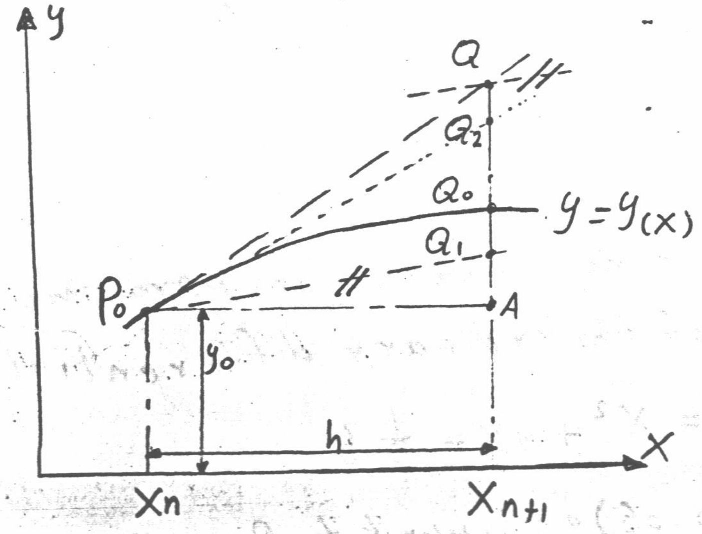
وهكذا بالنسبة لبقية قيم (y) ومقارنة القيم العددية المستحصلة مع القيم النظرية كما في الجدول الآتي:

Numerical Sol.		Analytical Sol.
x_r	y_r	$y(x_r)$
0	4	4
0.05	3.9	3.91
0.1	3.81	3.82
0.15	3.73	3.76
0.2	3.67	3.70
0.25	3.62	3.65

رابعاً:- طريقة أويلر المطورة (Modified Euler Method)

[Euler's Trapezoidal Method or Predictor Corrector Method]

ان التطور في هذه الطريقة عن التي سبقتها حاصل عن تحسين قيمة الدالة (y_{n+1}) في النقطة (x_{n+1}) وذلك بإعادة حساب قيمة (y_{n+1}) من معادلة الخط المستقيم الذي ميله هو معدل الميلين المحسوبين عند نهايتي الفترة (x_n, x_{n+1}) وكما مبين في الشكل التالي:



باستخدام طريقة أويلر نحصل على القيمة (y_{n+1}) أي الطول (AQ) (Predicting) ثم نجد الميل عند (x_{n+1}, y_{n+1}) ونرسم المستقيم ($P_0 Q_1$) ونجعله يمر بالنقطة (x_n, y_n) والموازي للمماس المقام على النقطة (x_{n+1}, y_{n+1}). لذلك فان الطول (AQ_1) يكون مساوياً الى:

$AQ_1 = y_n + h\cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})$ / بعد ذلك نأخذ معدل الطولين:

$$AQ_2 = \frac{1}{2}(AQ + AQ_1) \quad (\text{Correcting})$$

لذلك فان (AQ_2) سيكون أقرب الى القيمة الحقيقية من كل من (AQ_1, AQ) لان القيمة الحقيقية تقع بين حزين الطولين.

ورياضياً يمكن اعتماد ما يلي: $x_1 = x_0 + h$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\cdot[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})]$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\cdot[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})]$$

$$\vdots$$

$$y_1^{(r+1)} = y_0 + \frac{h}{2}\cdot[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(r)})]$$

ويمكن عمل التكرار خمس مرات مثلاً وما زاد عن ذلك فان الدقة ستكون اكثر ولكن العملية تبطأ ويمكن تلخيص الخطوات كما يلي:

أ- جد $y_1^{(0)}$ باستخدام طريقة أويلر المبسطة هكذا:

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$$

ب- إحسب المشتقة عند النقطة $(x_0 + h, y_1)$.

جـ- جد معدل المشتقتين عند نهايتي الخطوة (Interval).

د- يستمر التصحيح باستخدام أخر قيمة.

هـ- بعد عدة تصحيحات لـ (Euler) يمكن إعتماد (y) كقيمة ابتدائية للخطوة القادمة وتطبق نفس الخطوات اعلاه لأغراض التصحيح وهكذا.

وباعتماد المعادلة: $y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2}\cdot[f_r + f_{r+1}]$

Ex. 6 :- Use Euler's modified method to solve the following of differential equation:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y \quad \text{with } y_{(0)} = 4, \text{ for } x = 0(0.05)0.2,$$

work to 3D.

$x_0 = 0 \quad y_0 = $

Sol:-

Step 1: $f(x,y) = (x^2 + 4x - \frac{1}{2}y)$

$\therefore \boxed{y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)} = 4 + 0.05\,[0 + 4*0 - \frac{1}{2}*4] = 3.9$

$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})]$

$= 4 + \frac{0.05}{2} * [0 + 0 - \frac{1}{2}*4 + (0.05)^2 + 4*(0.05) - \frac{1}{2}*3.9] = 3.90$

$y_1^{(2)} = 4 + \frac{0.05}{2} * [-\frac{1}{2}*4 + (0.05)^2 + 4(0.05) - \frac{1}{2}*3.906] = 3.906$

Step 2: $x_2 = x_1 + h = 0.05 + 0.05 = 0.1$

$y_2^{(0)} = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 3.906 + 0.05\,[(0.05)^2 + 4*0.05 - \frac{1}{2}*3.90$

$= 3.912$

$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(0)})]$

$= 3.906 + \frac{0.05}{2} * [(0.05)^2 + 4*0.05 - \frac{1}{2}*3.906 +$

$(0.1)^2 + 4*0.1 - \frac{1}{2}*3.912] = 3.868$

$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(1)})]$

$= 3.906 + \frac{0.05}{2} * [(0.05)^2 + 4*0.05 - \frac{1}{2}*3.906 +$

$(0.1)^2 + 4*0.1 - \frac{1}{2}*3.868] = 3.824$

$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(2)})]$

$= 3.906 + \frac{0.05}{2} \cdot [(0.05)^2 + 4*0.05 - \frac{1}{2}*3.906 +$

$(0.1)^2 + 4*0.1 - \frac{1}{2}*3.824] = 3.825$

$y_2^{(4)} = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{(3)})]$

$= 3.825$

Step 3:

$$x_3 = x_2 + h \quad (= x_1 + 2h)$$
$$= 0.1 + 0.05 = 0.15$$

$$y_3^{(0)} = y_2 + h.f(x_2, y_2)$$
$$= 3.825 + 0.05\left[(0.1)^2 + 4 \times 0.1 - \frac{1}{2} \times 3.825\right] = 3.750$$

$$y_3^{(1)} = y_2 + \frac{h}{2}.\left[f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3^{(0)})\right]$$
$$= 3.825 + \frac{0.05}{2}\left[(0.1)^2 + 4 \times 0.1 - \frac{1}{2} \times 3.825 + (0.15)^2 - 4 \times 0.15 - \frac{1}{2} \times 3.750\right] = 3.756$$

$y_3^{(2)} = 3.756$ وبنفس الطريقة نحصل على :

Step 4:

$$x_4 = x_3 + h \quad (= x_1 + 3h)$$
$$= 0.15 + 0.05 = 0.2$$

$$y_4^{(0)} = y_3 + h.f(x_3, y_3)$$
$$= 3.756 + 0.05\left[(0.15)^2 + 4 \times 0.15 - \frac{1}{2} \times 3.756\right] = 3.693$$

$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{h}{2}.\left[f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4^{(0)})\right]$$
$$= 3.756 + \frac{0.05}{2}\left[(0.15)^2 + 4 \times 0.15 - \frac{1}{2} \times 3.756 + (0.2)^2 + 4 \times 0.2 - \frac{1}{2} \times 3.693\right] = 3.699$$

$$y_4^{(2)} = y_3 + \frac{h}{2}.\left[f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4^{(1)})\right]$$
$$= 3.756 + \frac{0.05}{2}\left[(0.15)^2 + 4 \times 0.15 - \frac{1}{2} \times 3.756 + (0.2)^2 + 4 \times 0.2 - \frac{1}{2} \times 3.699\right] = 3.699$$

نلاحظ هنا اننا نتوقف في العمليات التكرارية عندما تساوي القيمة الاخيرة

... مع القيمة التي قبلها . ويمكن عمل جدول يبين نتائج الحسابات السابقة لقيم (X) و (y) ، هكذا :

X	y
0	4
0.05	3.906
0.10	3.825
0.15	3.756
0.20	3.699

اذن يمكن القول انه عندما تكون لدينا المشتقة :

$$y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y$$

فأن تكاملها (y) وبعد تعويض قيمة ($x = 0.2$) تكون :

$$y_{(0.2)} = 3.699$$

* حاول ايجاد قيمة :

$y_{(0.25)} = ?$

و

$y_{(0.3)} = ?$

سؤال :- حاول حل جميع الامثلة المحلولة بإحدى الطرق بأستخدام الطرق الاخرى / ماذا تلاحظ ؟

المعادلات التفاضلية الآنية

(Simultaneous Differential Equations)

في الفقرات السابقة تم التعامل مع معادلة تفاضلية واحدة / ولكن المسائل العملية غالباً ماتكون مكونة من نظام من المعادلات التفاضلية الآنية . ان النظام الابسط من هذا النوع هو المتكون من زوج من المعادلات ، كما موضح ادناه :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y, z) \quad \text{و} \quad \frac{dz}{dx} = z' = g(x, y, z)$$

والشروط الابتدائية هي :

$$z(x_0) = z_0 \quad \text{و} \quad y(x_0) = y_0$$

إن الحل العددي (التقريبي) لهذه المعادلات يمكن ان نحصل عليه بإستخدام أي طريقة من الطرق السابقة / ولكننا سوف نأخذ طريقتين فقط وهما طريقة متسلسلة تايلور وطريقة رونج - كوتا ، كما موضح في المثالين التاليين .

ملاحظة :- ان المعادلات الخاصة بكل طريقة من الطريقتين وكيفية حل المعادلتين ستوضح من خلال حل المثال .

Ex. 7 :- Use Taylor series method to find the solution for the set of the following differential equations:

$$\frac{dy}{dx} = y - z \quad , \quad y(0) = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{dz}{dx} = -y + z \quad , \quad z(0) = 1$$

حيث ان :

$$x = 0\ (0.1)\ 0.1$$

Sol.:-

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{y'(x_n)}{1!}\cdot h + \frac{y''(x_n)}{2!}\cdot h^2 + \frac{y'''(x_n)}{3!}\cdot h^3 + \cdots$$

$$z(x_{n+1}) = z(x_n) + \frac{z'(x_n)}{1!}\cdot h + \frac{z''(x_n)}{2!}\cdot h^2 + \frac{z'''(x_n)}{3!}\cdot h^3 + \cdots$$

$$y(x_0) = y(0) = 0 \quad \& \quad z(x_0) = z(0) = 1$$

$$y'(x_0) = y(x_0) - z(x_0) = 0 - 1 = -1$$

$$z'(x_0) = -y(x_0) + z(x_0) = -0 + 1 = 1$$

$$y''(x_0) = y'(x_0) - z'(x_0) = -1 - 1 = -2$$

$$z''(x_0) = -y'(x_0) + z'(x_0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$y'''(x_0) = y''(x_0) - z''(x_0) = -2 - 2 = -4$$

$$z'''(x_0) = -y''(x_0) + z''(x_0) = -(-2) + 2 = 4$$

يكون اشتقاق كل دالة على حدة وبالترتيب الموضح اي بعد التعويض عن (y') و(z') نحسب (y'') و(z'') بعدها (y''') و (z''') .

$$\therefore y(0.1) = 0 + \left(\frac{-1}{1}*0.1\right) + \left(\frac{-2}{2}*(0.1)^2\right) + \left(\frac{-4}{6}*(0.1)^3\right)$$

$$= -0.1 - 0.01 - 0.0007 = -0.1107$$

&

$$z(0.1) = 1 + \frac{1}{1}*0.1 + \frac{2}{2}*(0.1)^2 + \frac{4}{6}*(0.1)^3$$

$$= 1 + 0.1 + 0.01 + 0.0007 = 1.1107$$

لاحظ انه يمكن الحل الى حد المشتقة الثالثة ايضاً ويكون الحل بدقة مقبولة. يمكن بهذه الطريقة حل عدد اكبر من معادلتين ولكننا الآن سنكتفي بمعادلتين ، و بحل من خلال مرحلة واحدة !

Ex. 8 :- Use Runge-kutta method to solve the set of the differential equations in Ex. 7 :

ان الحل يكون بحساب وتطبيق المعادلات التالية :

So. :-

$$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0, z_0)$$
$$L_1 = h \cdot g(x_0, y_0, z_0)$$
الخطوة الاولى

$$K_2 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2, z_0 + L_1/2)$$
$$L_2 = h \cdot g(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2, z_0 + L_1/2)$$
الخطوة الثانية

$$K_3 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2, z_0 + L_2/2)$$
$$L_3 = h \cdot g(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2, z_0 + L_2/2)$$
الخطوة الثالثة

$$K_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3)$$
$$L_4 = h \cdot g(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3)$$
الخطوة الرابعة

$$\therefore \quad y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$$
$$\& \quad z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$$

ان هذه العملية يمكن ان تستعمل لحل نظام المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الاولى ولأي عدد منها .

$$y' = f(x, y, z) = y - z, \quad y(0) = 0$$
$$z' = g(x, y, z) = -y + z, \quad z(0) = 1$$
$$x = 0(0.1)0.1$$

(i) $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0, z_0) = h \cdot (y - z)$

$= 0.1 * (0 - 1) = -0.1$

$L_1 = h \cdot g(x_0, y_0, z_0) = h \cdot (-y + z)$

$= 0.1 * (0 + 1) = 0.1$

(ii) $K_2 = h \cdot f(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2, z_0 + L_1/2)$

$= 0.1 * f((0 + 0.1/2), (0 + (-0.1/2)), (1 + 0.1/2))$

$K_2 = 0.1 * f(0.05, -0.05, 1.05) = h.(y - z)$

$= 0.1 * ((-0.05) - 1.05) = -0.11$

$L_2 = h.g(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2, z_0 + L_1/2)$

$= 0.1 * g(0.05, -0.05, 1.05) = g.(-y + z)$

$= 0.1 * (-(-0.05) + 1.05) = 0.11$

(iii) $K_3 = h.f(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2, z_0 + L_2/2)$

$= 0.1 * f((0 + 0.1/2), (0 + (-0.11/2)), (1 + 0.11/2))$

$= 0.1 * f(0.05, -0.055, 1.055)$

$= 0.1 * ((-0.055) - 1.055) = -0.111$

$L_3 = h.g(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2, z_0 + L_2/2)$

$= 0.1.g(0.05, -0.055, 1.055)$

$= 0.1 * (0.055 + 1.055) = 0.111$

(iv) $K_4 = h.f(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3)$

$= 0.1 * f((0 + 0.1), (0 + (-0.111)), (1 + 0.111))$

$= 0.1 * f(0.1, -0.111, 1.111)$

$= 0.1 * ((-0.111) - 1.111) = -0.1222$

$L_4 = h.g(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + L_3)$

$= 0.1 * g(0.1, -0.111, 1.111)$

$= 0.1 * (0.111 + 1.111) = 0.1222$

$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4]$

$= 0 + \frac{1}{6}[(-0.1) + 2*(-0.11) + 2*(-0.111) + (-0.1222)]$

$= -0.1107$

& $z_1 = z_0 + \frac{1}{6}[L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4]$

$= 0 + \frac{1}{6}[0.1 + 2*0.11 + 2*0.111 + 0.1222]$

$= 1.1107$

امثلة واسئلة

① Use Taylor Series method to solve the following:

$$y' = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y \qquad y(x_0) = 4 \qquad x = 0\,(0.25)\,0.25$$

Sol.:-

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot h + \frac{y''(x_0)}{2}\cdot h^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}\cdot h^3 + \frac{y^{IV}(x_0)}{24}\cdot h^4$$

$$y(0) = 4$$

$$y'(0) = (0)^2 + 4*(0) - \frac{1}{2}*4 = -2$$

$$y''(0) = 2x + 4 - \frac{1}{2}y' = 2*(0) + 4 - \frac{1}{2}*(-2) = 5$$

$$y'''(0) = 2 - \frac{1}{2}y'' = 2 - \frac{1}{2}*(5) = -0.5$$

$$y^{IV}(0) = -\frac{1}{2}y''' = -\frac{1}{2}*(-0.5) = 0.25$$

$$\therefore y_{(0.25)} = 4 + (-2)*0.25 + \frac{5*(0.25)^2}{2} + \frac{(-0.5)}{6}*(0.25)^3 + \frac{0.25}{24}*(0.25)^4$$

$$= 3.65$$

② Use 4th order Runge-kutta method to solve the previous!

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$k_1 = h\cdot f(x_0, y_0)$$

$$= 0.25*[(0)^2 + 4*(0) - \frac{1}{2}*4] = -0.5$$

$$k_2 = h\cdot f(x_0 + h/2, y_0 + k_1/2)$$

$$= 0.25[(0.125)^2 + 4(0.125) - \frac{1}{2}*(4 + \frac{(-0.5)}{2})] = -0.34$$

$$k_3 = h\cdot f(x_0 + h/2, y_0 + k_2/2)$$

$$= 0.25[(0.125)^2 + 4(0.125) - \frac{1}{2}(4 + \frac{(-0.34)}{2})] = -0.35$$

$$k_4 = h\cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$= 0.25[(0.25)^2 + 4(0.25) - \frac{1}{2}*(4 + (-0.35))] = -0.191$$

$$\therefore y_{(0.25)} = 4 + \frac{1}{6}[-0.5 + 2*-0.34 + 2*-0.35 + (-0.191)] = 3.655$$

③ Solve the following by using Taylor series method:

$$\frac{dy}{dx} = yz + x \quad , \quad y(0) = 1 \qquad x = 0\ (0.1)\ 0.1$$

$$\frac{dz}{dx} = xz + y \quad , \quad z(0) = -1$$

Sol:-

المشتقة ل $(y \cdot z)$ ستكون :
الاول x مشتقة الثاني + الثاني x مشتقة الاول .

$y' = yz + x \Rightarrow$

$y'(0) = (1)(-1) + 0 = -1$

$z' = xz + y \Rightarrow$

$z'(0) = (0)(-1) + 1 = 1$

اما ل $(x \cdot z)$ فتكون :

$= x \cdot z' + z \cdot \cancel{\frac{dx}{dx}}$

$= x \cdot z' + z \cdot 1$

$y'' = yz' + zy' + 1 \Rightarrow$

$y''(0) = (1)(1) + (-1)(-1) + 1 = 3$

$z'' = xz' + z \cdot 1 + y' \Rightarrow$

$z''(0) = (0)(1) + (-1) + (-1) = -2$

(ليكن الحل الى حد المشتقة الثالثة للكل)

$y''' = yz'' + z'y' + zy'' + y'z' + 0 \Rightarrow$

$y'''(0) = (1)(-2) + (1)(-1) + (-1)(3) + (-1)(1) = -7$

$z''' = xz'' + z' \cdot 1 + z' + y'' = xz'' + 2z' + y'' \Rightarrow$

$z'''(0) = (0)(-2) + 2(1) + 3 = 5$

$$\therefore y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + \frac{y''(x_0)}{2} \cdot h^2 + \frac{y'''(x_0)}{6} \cdot h^3$$

$$= 1 + (-1)(0.1) + \frac{3}{2}(0.1)^2 + \frac{(-7)}{6}(0.1)^3$$

$$= 0.9138$$

$$\& \ z(0.1) = z(0) + z'(0) \cdot h + \frac{z''(0)}{2} \cdot h^2 + \frac{z'''(0)}{6} \cdot h^3$$

$$= -1 + 1 \cdot 0.1 + \frac{(-2)}{2}(0.1)^2 + \frac{5}{6}(0.1)^3$$

$$= -0.9092$$

اضف الى الحل المشتقة الرابعة ، كم سيكون الفرق في الحل ؟

(4) Solve the previous example by using 4th order Runge-kutta method:

$$f(x,y,z) = yz + x \quad \& \quad g(x,y,z) = xz + y$$

$$K_1 = h \cdot f(x_0, y_0, z_0) = 0.1 \cdot f(0, 1, -1)$$

$$= 0.1\left[(1)(-1) + 0\right] = -0.1$$

$$L_1 = h \cdot g(x_0, y_0, z_0) = 0.1 \cdot g(0, 1, -1)$$

$$= 0.1\left[(0)(-1) + 1\right] = 0.1$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(0.05, 0.95, -0.95)$$

$$= 0.1\left[(0.95)(-0.95) + 0.05\right] = -0.0853$$

$$L_2 = h \cdot g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}, z_0 + \frac{L_1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(0.05, 0.95, -0.95)$$

$$= 0.1\left[(0.05)(-0.95) + 0.95\right] = 0.0903$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0.1 \cdot f(0.05, 0.9574, -0.9549)$$

$$= 0.1\left[(0.9574)(-0.9549) + 0.05\right] = -0.0864$$

$$L_3 = h \cdot g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}, z_0 + \frac{L_2}{2}\right) = 0.1 \cdot g(0.05, 0.9574, -0.9549)$$

$$= 0.1\left[(0.05)(-0.9549) + 0.9574\right] = 0.0910$$

$$K_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3) = 0.1 \cdot f(0.1, 0.9136, -0.909)$$

$$= 0.1\left[(0.9136)(-0.909) + 0.1\right] = -0.073$$

$$L_4 = h \cdot g(x_0 + h, y_0 + K_3, z_0 + L_3) = 0.1 \cdot g(0.1, 0.9136, -0.909)$$

$$= 0.1\left[(0.1)(-0.909) + 0.9136\right] = 0.0823$$

$$\therefore y_{(0.1)} = 1 + \frac{1}{6}\left[(-0.1) + 2(-0.0853) + 2(-0.0864) - 0.073\right] = 0.9139$$

$$\& \quad z_{(0.1)} = -1 + \frac{1}{6}\left[0.1 + 2(0.0903) + 2(0.091) + 0.0823\right] = -0.9092$$

وهذه النتائج مقاربة جداً لنتائج الطريقة السابقة.

(5) By using Taylor Series, solve the following differential equations:

A) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} y$; و $y_{(0)} = 1$; و $X = 0(1)1$

(1.6484 = Ans.)

B) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{X^2 + y}$; و $y(4) = 4$; و $X = 4(0.1)4.1$

الى حد المشتقة الثالثة (4.0049 = Ans.)

C) $y' = X + y^2$; و $y_{(0)} = 1$; و $X = 0(0.1)0.2$

(1.2734 = Ans.)

D) $y' = X + y + Xy$; و $y_{(0)} = 1$; و $X = 0(0.1)0.1$

(1.1159 = Ans.)

E) $y' = 2 + \sqrt{Xy}$; و $y_{(1)} = 1$; و $X = 1(0.1)1.1$

الى حد المشتقة الثالثة (1.3100 = Ans.)

(6) By using the 4th order Runge-kutta method, solve the following

A) $y' = \sqrt{X + y}$; و $y_{(0)} = 0.36$; و $X = 0(0.1)0.4$

(0.69 = Ans.)

B) $y' = 3X + y^2$; $y_{(1)} = 1.2$; و $X = 1(0.1)1.1$

(1.73 = Ans.)

C) $y' = \frac{y - X}{y + X}$; و $y_{(0)} = 1$; و $X = 0(0.1)0.2$

(1.17 = Ans.)

D) $y' = \frac{1}{X + y}$; $y_{(0)} = 2$; و $X = 0(0.2)0.6$

(2.24 = Ans.)

E) $y' = y \sin \pi X$; $y_{(0)} = 1$; و $X = 0(0.2)0.6$

(1.51 = Ans.)

(7) Solve the following Simultaneous differential equations by using Taylor series and 4th order Runge-kutta methods:

A) $\frac{dy}{dx} = yz - x$; $y(0) = 0$

$x = 0(0.2)0.2$

$\frac{dz}{dx} = y - x$; $z(0) = 1$

(0.9786 , -0.0214 = Ans.)

B) $\frac{dy}{dx} = y - 0.1y.z$; $y(0) = 25$

$x = 0(0.5)0.5$

$\frac{dz}{dx} = -0.5z + 0.02y.z$; $z(0) = 7$

= Ans.)

7.1383 , 28.9809 &

(7.1384 , 28.9797

C) $\frac{dy}{dx} = y^2 + \log(z) + x^2$; $y(0) = 1$

$x = 0(0.3)0.3$

$\frac{dz}{dx} = e^z - \cos y + \sin(x.y)$; $z(0) = 0.3$

الحل بطريقة رونج - كوتا فقط

(13.1024 , 5.3558 = Ans.)

(8) By using the numerical solution, find the solution of the following by using Taylor series method for different (h) as follows:

$y' = yx^2 - y$ $\quad y(0) = 1$ $\quad$ (5D)

$x = 0(h)2$; $h = 2, 1, 0.5$

($y(2) = 1.80351$, 1.06250 , -2.33333 = Ans.)

Tutorials Sheet No. 1

Q1) Find the smallest positive non-zero root of the following equation:

x_n $F x_n$ f' x_{n+1}

$$\frac{0.625+0.3X}{0.625+3.27X}-\cos\left(\sqrt{\frac{X}{0.0006}}*0.0191\right)=0$$

using Newton-Raphson method with accuracy $\boxed{0.0001}$.

Q2) Solve the following non-linear algebric equation to find one real root of $\tan x - 2\tanh x = 0$.

$x \mid x_{n+1}$

$\tan x = 2\tanh x \Rightarrow x = \tan^{-1}(2\tanh x)$

$y' = \frac{1.2\,\mathrm{sech}^2 x}{1+(2\tanh x)^2}$

Q3) Solve the following non-linear algebric equation to find one real non-zero root:

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\sec X + X^3 . e^{(5X/\tan x)}}\right) - e^{-x}$$

Q4) Use the simple iterative method to find the root of the following equation:

$e^{-X} : \cot X = 1$ starting with $(X = 0.6)$.

Q5) Find one real root of the following equation:

$\cos\left(\frac{X^2+5}{X^4+1}\right) = 0$, work to (5D) Places.

Q6) Desing a Newton-iteration for the cube root, then Caculate $\sqrt[3]{15}$, compute up to (4) decimal Places.

Q7) The velocity of a falling Parachutist is given by
$V = \frac{gm}{c}[1-e^{-(c/m).t}]$ where ($g=9.8$) cm/s² for
$m = 68100$ g. Compute c - the drag coefficient- So
that the velocity is (4000 cm/s) at ($t = 7$ sec.)
use the iteration method, take as initials (10000
or 15000) & work to four decimal places.

Q8) The upward velocity of a rocket can be computed
by the following formula:

$$V = u \cdot \ln\left(\frac{m_o}{m_o - q.t}\right) - g.t$$

where (V) is upward velocity,
(u) is the velocity at which fuel is expelled
relative to the rocket, (m_o) is the initial mass of the
rocket at time ($t=0$), (q) is the fuel consumption rate
and (g) is the downward acceleration of gravity (assumed
constant $= 9.8$ m/s²). If ($u = 2200$ m/s, $m_o = 160{,}000$ kg
& $q = 2680$ kg/s), compute the time at which ($V = 1000$ m/s.

Q9) The equation $\sin wt - e^{-at} = 0$ arises in the motio[n]
of a planetary gear system used in automatic transm-
ission. Determine the smallest positive root corret to
(4D). When ($w = 0.573$, $a = 0.01$), take ($t = 2$) as an
initial guess.

Q10) The equation ($\tan x - x = 0.01$) arises in the motio[n]
of helical gears. Find the smallest positive root of
this equation which is between (0.2 & 0.4) Correct to (3D

Q11) To find the accurate molar volume of a certain gas in a vessel, the equation of real gases (Van Der Walls equation) is used which is Presented in the following form $(P+\frac{a}{V^2})(V-b)=RT$. where (a & b) are constants, depending on the type of the gas, while (R) is the universal gas constant. For a Pressure (P = 1 atm.) & temperature (T = 300 k), find the malal volume of carbon dioxide which has the following data:

(R = 0.082054 L.atm/mole.k , a = 3.592, b = 0.04267)

use an initial guess of (24), & Perform your calculations correct to (4D). Compare the result obtained by the above method with that of the ideal gas low (i.e P.V = R.T

Q12). For turbulent flow of fluid in a smooth pipe, the following relation exists between the friction factor (Cf) & Reynolds number (Re): $\sqrt{\frac{1}{C_f}} = -0.4 + 1.74 \cdot In(Re\sqrt{C_f})$

Compute (Cf) for (Re = 10 E+5): Take as initials (0.0005 or 0.005) using iteration method, correct to six decimal places. (OR use Newton-Raphson method).

Q13) If a car is disturbed from its equilibrium position, its oscillation motion at any instant can be given by the following equation: $X(t) = e^{-nt}(X_o Cos pt + X_o \frac{n}{p} Sin p.t)$

where X(t) is the vibration at time (t), (n = c/2m),

$P = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C^2}{4m^2}}$, if the damping coefficient (C = $1.4*10^7$ g/s)

m = $1.2*10^6$ g, k = $1.25*10^9$ g/s & X = 0.3), find the root of the above equation which is between (0, 0.1), work to (5) decimal Places.

Q14) Find the smallest positive root of the following equation used in the study of vibrations,

$\tanh x + \tan x = 0$

Q15) While studying the method to determine the modulus of elasticity of a material we come across the transcendental frequency of the equation of the form:

$$\tan\beta = \frac{-2\lambda\beta}{1-\lambda^2\beta^2}$$

where (λ) is the ratio of mass of crystal to mass of specimen. For particular value of (λ) from (0.05) to (0.5). Find the first (3) positive roots of the above transcendental equation.

Q16) Find the diameter (D) of the pipe which satisfies the following equation: $8820D^5 - 2.31D - 0.6465 = 0$

Start with $(D = 0.1)$ & work to (5D).

Q17) Solve the system:

by iteration to obtain the solution near $(2.5, 0.2, 1.6)$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 9$$
$$x \cdot y \cdot z = 1$$
$$x + y - z^2 = 0$$

Q18) Solve by using Newton's method:

$$x^3 + 3y^2 = 21$$
$$x^2 + 2y = 0$$

make sketches of the graphs to locate approximate values of the intersection.

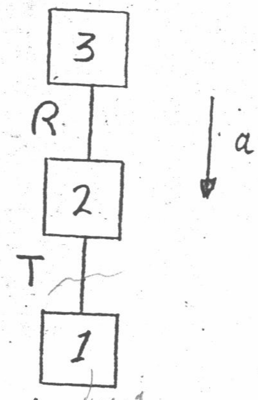
Q19) Solve the following set of non-linear equations use Newton-Raphson techniques:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$g(x,y) = x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 9 = 0.$$

Take: ($x_0 = 1$ & $y_0 = -1/2$)

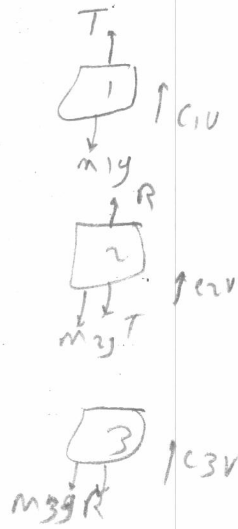
Q20) Suppose that a team of three parachutists are connected by a weightless cord while free-falling at a velocity of 5 m/sec. Using Gauss-Elimination method to calculate the tension in each section of chord and the acceleration of the team, given the following information:

Parachutist	Mass, kg (m)	Drag Coefficient, kg/s (c)
1	70	10
2	60	14
3	40	17



Hint: The equation of motion can be determined from Newton's second law ($\sum F = ma$):

$$m_1 \cdot g - T - c_1 \cdot v = m_1 \cdot a$$
$$m_2 \cdot g + T - R - c_2 \cdot v = m_2 \cdot a$$
$$m_3 \cdot g + R - c_3 \cdot v = m_3 \cdot a$$



Q21) Use the Gauss-Seidel method to solve:

$$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$$
$$4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61$$
$$x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 8$$

Also, use Jacobi-method and compare it with the above one. Work to five decimal places.

Q22) Given the following set of equation:

$$X_1 - 3X_2 + 12X_3 = 10$$
$$5X_1 - 12X_2 + 2X_3 = -33$$
$$X_1 - 14X_2 = -103$$

Solve using:

a) Gauss-Elimination with Partial Pivoting.

b) Jacobia method.

c) Gauss-Seidel method.

work to four decimal places.

Q23) The equilibrium of a certain frame work requires the equation:

$$10330\theta_1 + 1910\theta_2 + 434\theta_3 - 1736\theta_4 - 17.78 = 0$$
$$1910\theta_1 + 10069\theta_2 - 1736\theta_3 - 694\theta_4 + 8.89 = 0$$
$$434\theta_1 - 1736\theta_2 + 15718\theta_3 - 920\theta_4 - 23.10 = 0$$
$$-1736\theta_1 + 694\theta_2 - 920\theta_3 + 15198\theta_4 + 10.50 = 0$$

To be satisfied. Working to (6) decimal places find by using Gauss-Seidel method.

Q24) Solve the following system of linear equations using Gauss's elimination method with partial pivoting:

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 = -1$$
$$2X_1 + 3X_2 - X_3 - X_4 = -1$$
$$X_1 \quad - 2X_3 - X_4 = 6$$
$$X_1 \pm 2X_2 + 3X_3 - X_4 = 3$$

Q25) Solve the following system of equations by Gauss-Jordan method:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ p \\ w \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Q26) Determine the coefficients of the Polynomial:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Which passes through the points (1, 10), (2, 26), (−1, 2) and has a slope of (10) at the point (1, 10).

Q27) An engineer supervises the production of three types of automobiles. Three kind of material-metal, plastic and rubber are required for production the amounts needed to produce each car are:

Car	Metal (Ib/car)	Plastic (Ib/car)	Rubber (Ib/car)
1	1500	25	100
2	1700	33	120
3	1900	42	160

If totals of (106, 2.17 and 8.2) tons (ton = 2000 Ib) of metal, plastic and rubber respectively are available each day, how many automobiles can be produced per day?

Q28) Given the following function $y = \cos x$; construc a difference table for $x = 10(10)50$, and then fin the value of $\cos 23$ by using the Newton forward difference interpolation formula of degree 3.

Q29) Consider the function $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$; for $x = 0.155$ find the value of (y) by using Newton forward difference formula construct the table for $(X = 0.1\ (0.1)\ 0.4)$.

Q30) Fit a third-order Newton's interpolating Polynomial to estimate $\log 4.4$ at $X = 1\ (1)\ 5$ and then compare your result with that calculated by $\boxed{\text{Linear interpolation}}$.

Q31) Given the following data:

T(°k)	600	700	800	900
CP/R	3.671	3.755	3.838	3.917

wher "T" is the absolute temp. and "CP/R" is the dimensionless specific heat of air. Use Newton forward interpolation method to find the specific heat at $T = 670$.

Q32) Suppose a curve passes through the points $(0, -4)$, $(0.6, -3.64)$ and $(1, -3)$. Find the polynomial which fits this curve and find the value of (x) when $(y = -3.5)$.

Q33) Given the table for cooling of a particular hot body:

t	0	120	240	360	480
θ	100	86	74	64	56

where "t" is the time in second and "θ" is the temp. in ($\mathring{C}$) construct the difference table and use Newton's forward interpolation formula to calculate the temp at time ($t = 150$ sec.).

Q34) Kinematic viscosity of water (ν) is related to temp. "T" in the following number:

T	40	50	60	70	80
ν	1.66	1.41	1.22	1.06	0.93

where "T" in (°F) and "ν" in (10^{-5} ft²/s). Use the following methods to determine the value of (ν) at ($T = 47$°F

a) Newton's forward interpolation formula.

b) Lagrange interpolation formula.

Use your result to compare between the two methods.

Q35) You are performing a study to determine the relationship between the upward drag force and velocity for the falling parachutist. A number of experiments yields the following information for velocity (V in cm/sec.) and upward drag force (F in 10^6 dynes).

N=15

R=...

V	1000	2000	3000	4000
F	5	15.3	29.3	46.4

Use Lagrang interpolating formula to determine the relationship between the upward force and the velocity.

$$L_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1$$

Q36) You perform experiments and determine the following values of heat capacity (C) at various temp. (T), for a metal:

T	-50	-20	10	70	100
C	0.125	0.128	0.134	0.144	0.15

Use an interpolation method to predict the value of (C) at (T = 5).

طول

Q37) The saturation concentration of dissolved oxygen in water as a function of temp. and choloride concentration; listed below. Use NFDIF & LIF, to estimate the dissolved oxygen level at T=17.4 °C

T (°C)	5	10	15	20	25	30
Dissolved O_2	11.6	10.3	9.1	8.2	7.4	6.8

Q38) Use Lagrang's formula, find the form of the function f(x), given that:

X	0	2	3	6
f(X)	656	702	729	804

Q39) The acceleration (a), of a rocket at time (t), measured from Launching, is given by the table:

t (sec.)	0	10	20	30	40	50	60	70
a (m/sec.^{2})	30	31.7	33.6	35.7	38.0	40.7	43.7	47.1

Find the rocket's velocity and height at (t = 70 sec.)

Note: take 3rd difference for solution.

مهمة
ملاحظة مهمة جدا جدا

Q.40) A slider in a machine moves along a fixed straight rod its distance x (cm) along the rod is given below, for various values of time t (sec.). Find :

(i) The velocity and acceleration of the slider when (t = 0.3 sec.)

(ii) The distance (X) at time (t = 0.55 Sec.)

Note: for solution take up to fourth difference.

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
X	30.13	31.62	32.87	33.64	33.95	33.81	33.24

Q 41) Tabulate values of ($y = -\cos 2X$) for

$X = 0 \left(\frac{\pi}{8}\right) \frac{\pi}{2}$ and find :

(i) $y'(0)$, $y''(0)$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ numerically.

(ii) $\int_0^{\pi/2} y \cdot dx$ using Simpson's (1/3) rule.

Correct to (4D)

Q 42) Using Simpson's (3/8th) rule, evaluate:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+X}$$ taking (6) strips.

Q 43) By Simpson's rule, find the value of ($\ln \frac{3}{2}$) approximately by dividing the interval into (10) equal intervals.

Q44) A tank is discharging water through an orifice at a depth (X) meter below the surface of water whose area (A) m^2. The following are the values of the corresponding values of (A):

A	1.257	1.39	1.52	1.65	1.809	1.962	2.123	2.295	2.462	2.650	2.827
X	1.50	1.65	1.80	1.95	2.10	2.25	2.40	2.55	2.70	2.85	3.00

Using the formula: $(0.018)\,T = \int_{1.5}^{3.0} \frac{A}{\sqrt{X}} \cdot dx$

Caculate (T), the time in second for the level of water to drop from (3.0 m) to (1.5 m) above the orifice.

Q45) Evaluate: $\int_{0.1}^{0.7} \int_{-0.2}^{0.6} e^{x} \cdot \sin y \cdot dy\, dx$ using:

(i) The trapezoidal rule in both direction, $\Delta X = \Delta y = 0.1$

(ii) Simpson's (1/3) rule in both direction, $\Delta X = \Delta y = 0.1$

Q46) Evaluate the following integrals using the multiple rule of integration.

take ($\Delta X = \Delta y = 1$):

(i) $I = \int_{0}^{3} \int_{0}^{2} x y \cdot dx\, dy$

(ii) $I = \int_{0}^{1} \int_{0}^{2} y e^{x} \cdot dx\, dy$

(iii) $I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} e^{xy} \cdot dx\, dy$

T. Sheet No. $\boxed{2}$

Q1/ Given the following table:

x	0	1	2	3	4
y	10	12	18	28	42

Determine a least-squares fit to the data points using an approximation curve of the form $y = C_1 + C_2 X^2$

Q2/ Obtain a least-square fit to the following data using the approximation function: $y = C_1 + C_2 X + C_3 X^2$

X	0	1	2	3	4
y	0	10	16	18	16

Q3/ Given the following data:

X	0	1	2	3	4
y	1.95	1.28	0.70	0.49	0.25

Determine a least-square fit to the data using an approximation function of the form $y = k_1 e^{-k_2 x}$

Q4/ The stress-strain data obtained from a compression test of (6X12) in concrete cylinder are as follows:

Strain $\delta * 10^{-6}$	500	1000	1500	2000	2375
Stress σ	2250	3575	4250	4400	4200

Use the least-square method for obtaining the best fit for the above data for the following function: $\sigma = C_1 \cdot \delta \cdot e^{-C_2 \cdot \delta}$

Use the resulting model to pretict the value of the stress at ($\delta = 3300$).

Q5/ In the table below, temperature readings of a thermometer and times elapsed from the start of an experiment are listed:

Times(minutes)	10	20	30	40	60	70	80
Temperature(°C)	27.9	26.0	24.3	22.4	19.0	17.1	15.2

a) Plot these points on a scatter diagram and state whether linear regression techniques should be used.

b) If so, find the line of regression of temperature on time elapsed and draw this line on the scattar diagram.

c) Estimate the temperature when 45 minutes have elapsed.

Q6/ Given the table:

x	0	1	2	-1	-2
y	1	3	11	5	7

a) Fit a first-order polynomial through the data set.

b) Fit a second-order polynomial through the data set.

c) Fit a third-order polynomial through the data set.

Q7/ Given the following data:

x	1	2	3	4
y	1	4	8	14

Determine a least-squares fit to the data using an approximation function of the form:

$$y = a_1 x^{a_2}$$

Q8/ Use simple Euler method to solve the following differential equations:

(i) $y' = x + y + xy$; $y(0) = 1$, $x = 0\ (0.01)\ 0.1$

(ii) $y' + \frac{y}{x} = y^2$; $y(1) = 1$; $x = 1\ (0.1)\ 1.6$

(iii) $y' = xy^2$; $y(1) = 1$, $x = 1\ (0.1)\ 1.6$

(iv) $y' = \frac{1}{2} y$; $y(0) = 1$, $x = 0\ (0.1)\ 0.9$

Q9/ Solve by modified Euler method the following differential equations:

(i) $y' = x^2 + y$; $y(0) = 1$, $x = 0(0.02)0.06$

(ii) $y' = 2 + \sqrt{xy}$; $y(1) = 1$, $x = 1(0.1)2$

(iii) $y' = y^2 - y/x$; $y(1) = 1$, $x = 1(0.1)1.6$

(iv) $y' = y^2 + t^2$; $y(1) = 0$, $t = 1(0.1)2$

(v) $y' = \sqrt{x+y}$; $y(0) = 0.36$, $x = 0(0.1)0.4$

Q10/ Use Euler's modified (Trapezoidal) method to find the value of (y) when $(x=0.9)$. Given that $(y=0.25)$ at $(x=0)$ carry out the calculation with an accuracy (0.0001) with step size $(h=0.3)$.

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^{0.5}$$

Q11/ Solve numerically by Euler's modified method the following differential equation to find the value of T at $(t=0.5)$. $\frac{dT}{dt} = \sin t + T$ given that at $(t=0)$, $(T=2)$. Use step size $(h=0.1)$ work with an accuracy (0.0001)

Q12/ Use the Rung-kutta method to solve the following initial value problem: $\frac{dy}{dx} = x \cdot e^{(y-x^2)}$

where $y(0) = 0$, for $x = 0(0.2)0.4$

Q13/ The rate of cooling of a body can be expressed as:

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ wher (T) is the temperature of the body in $(^\circ C)$, (T_a) is the ambient temperature and (k) is proportionality constant. A body is initial heated to $(90^\circ C)$ is dropped into water that is held at constant value of $(T_a = 20^\circ C)$. Use Euler-Trapezoidal method to compute the temperature after $(0.5$ sec.$)$ with a time step $(h=0.25)$ work to 4D.

Q14/ Find the Laplace transforms of the following functions:

(1) $4t^3+5t\cos(4t+7)+\sin^3 t+t^2\cosh t$

(2) $\dfrac{\cos at+\cos bt}{t}+e^t\sin t\cdot\cos t$

Q15/ Find the inverse Laplace transforms of :

(1) $\dfrac{3S-8}{4S^2+25}$ (2) $\dfrac{3S-12}{(S^2+8)(S-1)}$ (3) $\dfrac{1}{(S-2)^3}+\dfrac{1}{(S-2)^5}$

(4) $\dfrac{S^2+6}{(S^2+1)(S^2+4)}$ (5) $\dfrac{2S^3+2S^2+4S+1}{(S^2+1)(S^2+S+1)}$ (6) $\dfrac{S}{(S^2+9)^2}$

(7) $\dfrac{5S^2+15S+7}{(S+1)(S-2)^3}$ (8) $\dfrac{2S+1}{S^2+4S+13}$ (9) $\dfrac{2S-4}{(2S+3)^3}$

Q16/ Solve by Laplace transformation method the follwing differential equations:

(1) $y''-3y'+2y=4e^{2t}$ given that $y(0)=-3$ and $y'(0)=5$

(2) $X''-X'-2X=20\sin 2t$ when $X(0)=-1$; $X'(0)=2$

(3) $y''+2y'+y=t\cdot e^{-t}$ given that $y(0)=1$ and $y'(0)=2$

(4) $X''+8X'+32X=32\sin 4t$ when $X(0)=X'(0)=0$

(5) $y''+4y'=\cos 2t$ given that $y(0)=1$, $y'(0)=1$

(6) $y'''+8y=32t^3-16t$ if $y(0)=3$, $y'(0)=y''(0)=0$

(7) $y^{iv}+2y'''+2y''+2y'+y=e^{-t}$ given that

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$$

Q17/ Using separation of variables, solve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Q18/ Using separation of variables, solve the P.D.E. :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

T. Sheet No. 3

① Find two real roots of $x^4 = x + 0.15$.

② Design a Newton iteration for the cube root, Calculate $\sqrt[3]{7}$.

③ Design a Newton iteration for computing the Kth root of a positive number r, Calculate $\sqrt[5]{60}$.

④ Apply Newton's method to the following equations:

Ⓐ $x^3 - 5x + 3 = 0$

Ⓑ $x^4 - x^3 - 2x - 34 = 0$

Ⓒ $x^3 - 3.9x^2 + 4.79x - 1.881 = 0$ (Ans. $x_1 = 1.9$)

⑤ Find all real solutions of the following equations by Newton's method:

Ⓐ $x^4 = 3$ Ⓑ $x^3 - 5x = 6$ Ⓒ $\cos x = x$

⑥ Using the Gauss elimination, solve the following systems of linear equations:

Ⓐ $3x + y = 7$
$x - 4y = -2$
(Ans. $x = 2, y = 1$)

Ⓑ $4x - 2y = 6$
$6x + y = -3$

Ⓒ $2x - 7y = 5$
$8x + y = -9$
(Ans. $x = -1, y = -1$)

Ⓓ $3x - y + z = -2$
$x + 5y + 2z = 6$
$2x + 3y + z = 0$

Ⓔ $4x - y + 2z = 15$
$-x + 2y + 3z = 5$
$5x - 7y + 9z = 8$
(Ans. $x = 4, y = 3, z = 1$)

Ⓕ $y + 3z = 9$
$2x + 2y - z = 8$
$-x + 5z = 8$

Ⓖ $3x + 4y - 7z = -7$
$x - 2y + z = 1$
(Ans. $x = y, z = y + 1$)

Ⓗ $x - 2y + z = 0$
$-x + 3y - 2z = 1$

Ⓘ $4x - 3y + 3z = 0$
$8x + 7y - 7z = 0$
(Ans. $x = 0, y = z$)

(J) $2w - 4x + 3y - z = 3$
$w - 2x + 5y - 3z = 0$
$3w - 6x - y - z = 0$

(K) $3w - x + 8y - 2z = -2$
$-w + 2x - 13y + 3z = 3$
$4w + 3x - 9y + z = 1$
(Ans. $w = 0$, $x = 2y$, $z = 3y + 1$)

(7) Apply the Gauss-Seidel iteration to the following systems. Starting from 1, 1, 1 :

(A) $10x + y + z = 6$
$x + 10y + z = 6$
$x + y + 10z = 6$

(B) $4x + y = -8$
$4y + z = 2$
$x + 2z = 2$

(C) $10x - y - z = 13$
$x + 10y + z = 36$
$-x - y + 10z = 35$
(Ans. 2, 3, 4)

(D) $4x + 2y + z = 14$
$x + 5y - z = 10$
$x + y + 8z = 20$
(Ans. 2, 2, 2)

(8) Apply the Gauss-Seidel iteration to the systems in Problem 7, starting from:

(a) 0, 0, 0, (b) 10, 10, 10. Compare and comment.

Then apply Jacobi iterations, starting from 1, 1, 1. Compare and comment.

(9) Starting from 0, 0, 0 show that for the following System the Gauss-Seidel iteration converges, whereas the Jacobi iteration diverges:
$2x + y + z = 4$
$x + 2y + z = 4$
$x + y + 2z = 4$

(10) It is plausible to think that the Gauss-Seidel iteration is better than the Jacobi iteration. Actually the methods are not comparable. Illustrate this surprising fact by showing that for the following system the Jacobi iteration converges whereas the Gauss-Seidel iteration diverges.
(Hint: Use eigenvalues)
$x + z = 2$
$-x + y = 0$
$x + 2y - 3z = 0$

(11) Solve each of the following two systems, compare the solutions and comment:

$$\begin{aligned} 2X + 1.4y &= 1.4 \\ 1.4X + y &= 1 \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} 2X + 1.4y &= 1.44 \\ 1.4X + y &= 1 \end{aligned}$$

(12) Solve each of the following two systems, compare the solutions and comment:

$$\begin{aligned} 5X - 7y &= -2 \\ -7X + 10y &= 3 \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} 5X - 7y &= -2 \\ -7X + 10y &= 3.1 \end{aligned}$$

(13) Show that the solution of the system:

$$\begin{aligned} 6X_1 + 7X_2 + 8X_3 &= 21 \\ 7X_1 + 8X_2 + 9X_3 &= 24 \\ 8X_1 + 9X_2 + 10X_3 &= 26 \end{aligned}$$

is $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$

(14) Using the Gauss elimination, show that the system:

$$\begin{aligned} X + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}Z &= 1 \\ \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}Z &= 0 \\ \tfrac{1}{3}X + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}Z &= 0 \end{aligned}$$

has the solution $X = 9$, $y = -36$, $Z = 30$

Rework the problem, assuming that a computer capable of carrying only two significant digits at a time is to do the computations. Compare the results and comment.

[The coefficient matrix is called the 3X3 Hilbertmatrix]

(15) Calculate a difference table of:

(A) $f(x) = X^3$ for $X = 0(1)5$, find $(1.57)^3$

(B) $f(x) = \cos x$ for $x = 0(0.2)1$, find $\cos 0.75$

(C) $f(x) = \sin x$ for $x = 0.2(0.2)0.6$, find $\sin 0.3$

(D) $f(x) = \log x$ for $X = 8(0.5)10$, find $\log 8.68$

(16) Compute $\int_0^1 x^3 dx$ by the rectangular rule with $n=5$. What is the error? Why there is a difference?

(17) To get a feeling for the increase in accuracy, compute $\int_0^1 x^2 dx$ with $h=1$, $h=0.5$, $h=0.25$, $h=0.2$.

(18) Evaluate $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ by:

(A) The rectangular rule with $h=0.2$ and $h=0.1$

(B) Simpson's rule with $h=0.5$ and $h=0.1$

(Ans. 0.9466 & 0.9458 & 0.9461

(19) Find an approximate value of $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ by Simpson's rule with $n=4$. Estimate the error.

(Ans. 0.69325 $E \simeq 0.00053$)

(20) Evaluate $\int_0^1 x^5 dx$ by Simpson's rule with $n=10$. What error bounds are obtained?

(21) Consider $f(x)=x^4$ for $x_0=0$, $x_1=0.2$, $x_2=0.4$, $x_3=0.6$, $x_4=0.8$. Calculate $f'_{0.4}$. Determine the error. Compare and comment.

(22) Find the Laplace transforms of the following functions (a, b, T, ω and θ are constants.):

(a) $3t+4$ (Ans. $3/s^2+4/s$)

(b) $at+b$

(c) t^3+at+b (Ans. $2/s^3+a/s^2+b/s$)

(d) $(a+bt)^2$

(e) $\sin(2n\pi t/T)$ (Ans. $2n\pi[T(s^2+(2n\pi/T)^2)]^{-1}$)

(f) $\sin(\omega t+\theta)$

(g) $\cos(\omega t+\theta)$ (Ans. $S\cos\theta - \omega \sin\theta)/(s^2+\omega^2)$)

(h) $\sin^2 t$

(i) $\cos^2 t$ (Ans. $1/2s + s/(2s^2+8)$)

(j) $\cosh^2 3t$

(k) e^{at+b} (Ans. $e^b/(s-a)$)

(l) $\sinh^2 2t$

(23) Find $f(t)$ if $F(s)=\mathcal{L}(f)$ is as follows (a, b, etc. are constants):

(a) $\frac{5}{s+3}$

(b) $\frac{2\pi}{s+\pi}$

(c) $\frac{1}{s^2+25}$

(d) $\frac{s-4}{s^2-4}$

(Ans. $\cosh 2t - 2\sinh 2t$)

(e) $\frac{1}{s^4}$ (f) $\frac{s+1}{s^2+1}$ (g) $\frac{4}{(s+1)(s+2)}$ (h) $\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}$

(i) $\frac{2}{s^2+16}$ (j) $\frac{9}{s^2+3s}$ (k) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ $(a \neq b)$

(Ans. $(e^{at}-e^{bt})/(a-b)$)

(24) Find $f(t)$ for $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$

(25) Show that:

(a) $\mathcal{L}(t\cos\omega t) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ (b) $\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

(c) $\mathcal{L}(t\cosh at) = \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ (d) $\mathcal{L}(t\sinh at) = \frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

then using formulas in Problems (25-a) & (25-b), show that:

(e) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$

(f) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$

(26) Find $f(t)$ if $\mathcal{L}(f)$ equals:

(a) $\frac{1}{s^2+s}$ (Ans. $1-e^{-t}$) (b) $\frac{4}{s^3-4s}$ (c) $\frac{1}{s^3+4s}$ (Ans. $(1-\cos 2t)/4$) (d) $\frac{1}{s^2+as}$

(e) $\frac{1}{s}\left(\frac{s-a}{s+a}\right)$ (Ans. $2e^{-at}-1$) (f) $\frac{1}{s^2}\left(\frac{s-a}{s+a}\right)$ (g) $\frac{8}{s^4-4s^2}$ (Ans. $\sinh 2t - 2t$) (h) $\frac{1}{s^2}\left(\frac{s-2}{s^2+4}\right)$

(i) $\frac{1}{s^4-2s^3}$ (Ans. $(e^{2t}-1-2t-2t^2)/8$) (j) $\frac{2s-\pi}{s^3(s-\pi)}$ (k) $\frac{1}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)$ (Ans. $1+t-\cos t-\sin t$) (l) $\frac{1}{s^4(s^2+\pi^2)}$

(27) Using the Laplace transformation to solve the following initial value problems:

(a) $4y''+\pi^2 y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

(b) $y''+\omega^2 y = 0$, $y(0) = A$, $y'(0) = B$ (ω real, not zero)

(Ans. $y = A\cos\omega t + (B/\omega)\sin\omega t$)

(c) $y''+2y'-8y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$

ⓓ $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y_{(0)} = 1$, $y'_{(0)} = 7$

ⓔ $y'' - Ky' = 0$, $y_{(0)} = 2$, $y'_{(0)} = k$

(Ans. $y = e^{kt} + 1$)

ⓕ $y'' + ky' - 2k^2 y = 0$, $y_{(0)} = 2$, $y'_{(0)} = 2k$

(Ans. $y = 2e^{kt}$)

(28) [Forced undamped vibrations]

Show that the subsidiary equation of the differential equation: $y'' + \omega^2 y = r(t)$ (ω constant)

has the solution: $$Y_{(s)} = \frac{s\,y_{(0)} + y'_{(0)}}{s^2 + \omega^2} + \frac{R_{(s)}}{s^2 + \omega^2}$$

where $R_{(s)}$ is the Laplace transform of $r(t)$. Note that the first term on the right is completely determined by given initial conditions, say, $y_{(0)} = k_1$, $y'_{(0)} = k_2$, and the Second term is independent of those conditions.

(29) Find the Laplace transforms of the following functions:

ⓐ $2te^t$ ⓑ $t^2 e^{-2t}$ ⓒ $e^t(\cosh 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t)$

ⓓ $e^{-2t} \cdot \cos t$ ⓔ $e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ ⓕ $e^{-2t}(2\cos 3t - \sin 3t)$

(30) Find $f(t)$ if $\mathcal{L}(f)$ equals:

ⓐ $\dfrac{n\pi}{(s+2)^2 + n^2\pi^2}$ ⓑ $\dfrac{a_1}{(s-3)^2} + \dfrac{2a_2}{(s-3)^3}$

ⓒ $\dfrac{s}{(s+3)^2 + 1}$ ⓓ $\dfrac{as+b}{(s+c)^2 + \omega^2}$

(31) Using the Laplace transforms to solve the following initial value problems:

ⓐ $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y_{(0)} = 0$, $y'_{(0)} = 1$

(b) $y'' + 2y' + 17y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 12$

(c) $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

(d) $9y'' - 6y' + y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

(e) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$

(f) $4y'' - 4y' + 37y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1.5$

(g) $4y'' - 8y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(h) $y'' + y' + 1.25y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -0.5$

(32) Representing the hyperbolic functions in terms of exponential functions and appling the first shifting theorem, show that:

(a) $\mathcal{L}(\cosh at.\cos at) = \dfrac{s^3}{s^4 + 4a^4}$ (b) $\mathcal{L}(\cosh at.\sin at) = \dfrac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$

(c) $\mathcal{L}(\sinh at.\cos at) = \dfrac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4}$ (d) $\mathcal{L}(\sinh at.\sin at) = \dfrac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

(33) Find $f(t)$ if $F(s) = \mathcal{L}(f)$ equals:

(a) $2(e^{-2s} - e^{-4s})/s$ (b) e^{-s}/s

(c) e^{-as}/s^2 (d) $4(1 - e^{-3s})/s$

(e) $(e^{-s} + e^{-2s} - 3e^{-3s} + e^{-6s})/s^2$ (f) $(e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s})/s^2$

(34) Find the inverse Laplace transforms of the following functions:

(a) $se^{-\pi s}/(s^2+4)$ (b) $e^{-s}/(s^2+\omega^2)$ (c) e^{-2s}/s^2

(d) e^{-s}/s^4 (e) $e^{-\pi s}/(s^2+2s+2)$ (f) $(1-e^{-\pi s})/(s^2+4)$

(35) Find Laplace transform of:

(a) $t\cos 2t$ (b) te^{2t} (c) $t\cosh t$ (d) $t^2 e^t$

(e) $t\sinh 2t$ (f) $t^2 \sinh 2t$ (g) $t^2 \cos\omega t$ (h) $te^{-2t}\sin\omega t$

Ans.: b) $1/(s-2)^2$ d) $2/(s-1)^3$ f) $\dfrac{12s^2+16}{(s^2-4)^3}$ g) $\dfrac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$

(36) Apply the power series method to the following differential equations:-

ⓐ $y' = 2y$ ⓑ $y' + y = 0$ ⓒ $y' = ky$

ⓓ $(1-x)y' = y$ ⓔ $(x+1)y' = 3y$ ⓕ $(1+x)y' + y = 0$

ⓖ $y' + 2xy = 0$ ⓗ $y' = 3x^2 y$ ⓘ $y'' - y = 0$

ⓙ $y'' + 4y = 0$ ⓚ $y'' - y' = 0$ ⓛ $y'' - 9y = 0$

ⓜ $xy' = 3y + 3$ ⓝ $(1-x^2)y' = 2xy$

ⓞ $(x+1)y' - (2x+3)y = 0$ ⓟ $xy' = (x+1)y$

ⓠ $y'' - 3y' + 2y = 0$ ⓡ $(x-3)y' - xy = 0$

ⓢ $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ⓣ $y'' + y = 2x^2 + x$

Ans.: o) $y = c_0(1 + 3x + 4x^2 + \frac{10}{3}x^3 + 2x^4 + \frac{14}{15}x^5 + \cdots) = c_0(x+1)e^{2x}$

q) $y = c_0 + c_1 x + (\frac{3}{2}c_1 - c_0)x^2 + (\frac{7}{6}c_1 - c_0)x^3 + \cdots$ $c_0 = A + B$ & $c_1 = A + 2B$

(37) Find the temperature $T(x,t)$ in a bar of silver (length 10 cm, constant cross section of area 1 cm², density 10.6 gm/cm³, thermal conductivity 1.04 $\frac{\text{cal}}{\text{cm deg sec}}$, specific heat 0.056 cal/gm deg) which is perfectly insulated laterally, whose ends are kept at temperature 0°C and whose initial temperature (in °C) is $f(x)$, where:

a) $f(x) = \sin 0.1\pi x$ b) $f(x) = \sin 0.2\pi x$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < 5 \\ 10 - x & \text{if } 5 < x < 10 \end{cases}$ d) $f(x) = x(10 - x)$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{if } 5 < x < 10 \end{cases}$ f) $f(x) = x(100 - x^2)$

Ans.: a) $T = \sin 0.1\pi x \, e^{-1.752\pi^2 t/100}$

c) $T = \frac{40}{\pi^2}(\sin 0.1\pi x \, e^{-0.01752\pi^2 t} - \frac{1}{9}\sin 0.3\pi x \, e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + - \cdots$

d) $T = \frac{800}{\pi^3}(\sin 0.1\pi x \, e^{-0.01752\pi^2 t} + \frac{1}{3^3}\sin 0.3\pi x \, e^{-0.01752(3\pi)^2 t} + \cdots$