Q[illegible] Find the Laplace transfoms of the following functions :

$$(1)\ f(t)=\begin{cases}3t & 0<t<2\\ t & 2<t<4\end{cases}\quad \text{where } f(t+4)=f(t)$$

$$(2)\ f(t)=\begin{cases}t & 0<t<c\\ 2c-t & c<t<2c\end{cases}$$

Triangle wave function of period (2c).

$(3)\ f(t)=\sin(\pi t/a)$ for $0<t<a$

(Rectified sin wave of period (a)

$(4)\ f(t)=t/T$ for $0<t<T$

(saw – tooth wave of period (T)

Q[illegible] Express the following functions in terms of unit step functions :

$$(1)\ f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<a\\ 2 & a<t<2a\\ 3 & 2a<t<3a\end{cases}$$

$$(2)\ f(t)=\begin{cases}t^2 & 0<t<2\\ 4t & t>2\end{cases}$$

Q[illegible] Express :

$$f(t)=\begin{cases}e^{-t} & 0<t<3\\ 0 & t>3\end{cases}$$

In terms of unit step function and hence find its Laplace transform.

Q[illegible] Find the inverse Laplace transform of :

$$(i)\ \frac{e^{-as}}{s^2}\qquad (ii)\ \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\qquad (iii)\ \frac{s\cdot e^{-as}}{s^2-w^2}$$

الفصل الحادي عشر

حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية.

POWER SERIES SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

11.1 مقدمة :

يمكن حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة (Constant Coefficients) باستخدام الطرق الجبرية السابقة المتعارف عليها، أما في حالة المعادلات ذات المعاملات المتغيرة (Variable Coefficients) فأن الحالة تكون معقدة نوعاً ما، كما هي الحالة في معادلة بسل (Bessel's Equation) ومعادلة لجندر (Legendr's Equation) والمعادلة الهندسية الفوقية (Hypergeometric Equation) وغيرها، وبما أن الحل لمثل هذه المعادلات مهم وذا فائدة كبيرة في التطبيقات الهندسية فأن الحلول المتاحة لمثل هذه المعادلات ستظهر على شكل متسلسلات قوى ولهذا السبب فأن طريقة الحل تدعى بطريقة متسلسلات القوى (Power Series Method).

أي دالة يمكن التعبير عنها بمتسلسلة غير محددة (Infinite Series) :

$$a(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$$

أو :

$$b(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$$

والصيغتين المعروفة لتحويل أي دالة بمتسلسلة هي :

1. متسلسلة تايلور (Taylor Series) :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\cdots$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-a)^m=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots\cdots$$

حيث أن : $(c_0\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ \ldots\ldots\ c_m)$: هي ثوابت

x : متغير (Variable)

a : المركز (Center)

وان : $c_0 = f(a)\ , c_1 = f'(a), c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}\ , c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots\ldots$

سلسلة ماكلورين (Maclaurin Series) :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots\ldots$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots$$

حيث أن :

$$c_0 = f(0), c_1 = f'(0), c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots\ldots$$

ومن الأمثلة المألوفة لمتسلسلات القوى لماكلورين (Maclaurin).

(1) $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$

(2) $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$

(3) $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$

(4) $\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$

(5) $\ln(1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{m+1} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$

11.2 طريقة متسلسلات القوى (Power Series Method) :

الفكرة الأساسية لطريقة متسلسلات القوى بسيطة وسوف نخضع هذا الأسلوب لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الأولى أو الثانية، متجانسة، خطية ذات معاملات المتغيرة (Variable Coefficients).

الشكل العام لها يكون :

$$P_0(x) \frac{dy}{dx} + P_1(x) \cdot y = Q(x) \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$P_0(x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + P_2(x) \cdot y = 0$$

أو :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P_1(x)}{P_0(x)} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} \cdot y = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

لإيجاد الحل لـ (1) و (2) أعلاه باستخدام متسلسلات القوى، فأن هناك نوعان من الحل اعتمادا كون الحل يقع بالقرب من نقطة اعتيادية (Near Ordinary Point) أو بالقرب من نقطة مفردة (شاذة) (Near Singular Point) فإذا كانت $P_0(x_0) = 0$ عند $(x = x_0)$ فان الحل يعتبر بالقرب من النقطة الشاذة (Singular point)، أما إذا كانت $P_0(x_0) \neq 0$ عند $(x = x_0)$ فان الحل يعتبر بالقرب من النقطة الاعتيادية (Ordinary Point). وسوف نعتبر الحل هنا حول $(x_0 = 0)$، حيث أن حلول حول نقاط أخرى للانفرادية (Singularity) تكون ممكنة.

يمكن القول إذن انه عندما يكون الحل بالقرب من النقطة الاعتيادية (Ordinary Point) فان أعلى مشتقة يجب أن تبقى وإلا فإن الحل يكون بالقرب من نقطة شاذة (Singular Point) وان الحل سوف يكون حول$(x_0 = 0)$.

عندما يكون الحل بالقرب من النقطة الاعتيادية (Near Ordinary Point) فانه سيكون بالشكل :

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

Ex.1 :

(i) $y'' = xy$

نقطة اعتيادية عند $(x=0)$ (لا انفرادية)

(ii) $(x+1)y' - (x-2)y = 0$

معادلة تفاضلية اعتيادية من الدرجة الأولى

نقطة اعتيادية عند $(x=0)$ (لا انفرادية عند $x=0$)

(iii) $y'' - 3xy' + 3y = 0$

معادلة هيرمت (Hermite Equation)

تمثل نقطة اعتيادية عند $(x=0)$ (لا انفرادية عند $x=0$)

أما عند يكون الحل بالقرب من النقطة الشاذة (Near Singularity Point).

فان سيكون بالشكل :

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$$

حيث أن (r) هو أس وقد يكون عدد موجب أو سالب أو كسر ويتم تحديده عن طريق حل المعادلة الرأسية (Indicial Equation) والتي سيتم الحصول عليها لاحقاً.

Ex. 2:

(i) $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ إنفرادية عند (x=0)

(ii) $x^2y'' + 3xy' + (1-x)y = 0$ إنفرادية عند (x=0)

(iii) $x^2y'' + 2xy' - xy = 0$ إنفرادية عند (x=0)

11.3 حل متسلسلات القوى بالقرب من النقطة الاعتيادية
Power Series Solution Near Ordinary Point

يمكن أجمال خطوات الحل باستخدام متسلسلات القوى بالقرب من النقطة الاعتيادية كما يلي :

الخطوة الأولى :

نختار الحل الذي يكون بالشكل : $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$

ثم نشتق مرة أو مرتين حسب المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m\, C_m x^{m-1}$$

$$y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m\,(m-1)\, C_m\, x^{m-2}$$

بعدها نعوض (y'', y', y) في المعادلة التفاضلية.

الخطوة الثانية :

نفتح الحدود ونغير الأس (Shift Index) إذا كان من الضروري وذلك لمعادلة بالحدود الأخرى.

الخطوة الثالثة :

نعيد ترتيب الحدود ونجمع القوى المتشابهة لـ (x) ونساوي المعاملات لكل قوة لـ (x) إلى الصفر مبتدئين بالحدود الثابتة، ثم الحدود التي تحتوي على (x)، ثم الحدود التي تحتوي على (x^2) .... الخ، ليعطي هذا علاقة التكرار (Recurrance Formula) والتي منها نعين المعاملات المجهولة بالتعاقب.

الخطوة الرابعة :

نعوض قيم المعاملات التي استخرجت من الخطوة السابقة في الحل المفروض لنحصل على الحل النهائي للمعادلة التفاضلية المعطاة.

Ex. 3:

Solve in series $y'' = xy$?

الحل :

وذلك لأن الحل هنا يكون بالقرب من نقطة اعتيادية (Ordinary Point).

الخطوة الأولى :

نكتب المعادلة التفاضلية بشكل متسلسلة :

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\cdot C_m \cdot x^{m-2} = x\sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot x^m$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\cdot C_m \cdot x^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot x^{m+1} = 0$$

الخطوة الثانية :

نغير الأس (Shift Index) للجانب الأيسر ونفتحه للحصول على فترة العامة.

$$2C_2 + \sum_{m=0}^{\infty} (m+3)(m+2)\cdot C_{m+3} \cdot x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot x^{m+1} = 0$$

الخطوة الثالثة :

نغير الترتيب ونجمع معاملات الحدود لنفس القوة لـ (x) :

$$2C_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \{(m+3)(m+2)\cdot C_{m+3} - C_m\}\cdot x^m = 0$$

أقل قوة لـ (x) يكون (C_2=0) ولإيجاد علاقة التكرار (Recurrance Formula) (R.F.).

$$(m+3)(m+2)\, C_{m+3} - C_m = 0$$

$$\therefore C_{m+3} = \frac{C_m}{(m+3)(m+2)}$$

حيث يطلق على هذه العلاقة بصيغة التكرار (R.F.).

إن (C_0) سوف يحدد (C_6, C_3) .... الخ، أما (C_1) فإنه سيحدد (C_7, C_4) .... الخ.

ونلاحظ أن $(C_2=0)$ أي أن (C_8, C_5) .... الخ جميعها تساوي صفر.

ولإيجاد قيم المعاملات التي تكون بدلالة (C_1, C_0) :

$$C_0, C_3 = \frac{C_0}{3\times 2},\ C_6 = \frac{C_3}{6\times 5} = \frac{C_0}{6\times 5\times 3\times 2}\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

أما قيم المعاملات التي تكون بدلالة (C_1) فإن :

$$C_4 = \frac{C_4}{4\times 3},\ C_7 = \frac{C_4}{7\times 6} = \frac{C_1}{7\times 6\times 4\times 3}\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

الخطوة الرابعة :

نكتب الحل :

$$y(x) = C_0 + C_1 + Cx^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + C_7x^7 + C_8x^8$$
$$= [C_0 + C_3x^3 + C_6x^6 + \ldots\ldots] + [C_1x + C_4x^4 + C_7x^7 + \ldots\ldots]$$
$$= C_0\left[1 + \frac{x^3}{3\times 2} + \frac{x^6}{6\times 5\times 3\times 2} + \ldots\ldots\right] + C_1\left[x + \frac{x^4}{4\times 3} + \frac{x^7}{7\times 6\times 4\times 3} + \ldots\ldots\right]$$

Ex.4:

Solve in Series :

$$\left(2 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

الخطوة الأولى :

لأنه عند $(x=0)$ تعتبر نقطة اعتيادية فإننا سنستعمل الحل الذي يكون بالشكل :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m$$

نعوض كل $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y$ في المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\left(2 - x^2\right)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} + 2x\sum_{m=1}^{\infty} mC_m x^{m-1} - 2\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m = 0$$

الخطوة الثانية :

الخطوة الثانية :

نعيد الترتيب ونغير الأس (Shift Index) ونفتح الحدود ثم نجمع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$2\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)C_m x^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty}\left[m(m-1) - 2m + 2\right]C_m x^m = 0$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[2(m+2)(m+1)C_{m+2} - \left(m^2 - 3m + 2\right)C_m\right]x^m = 0$$

الخطوة الثالثة :

نساوي المعاملات الى الصفر وأن المعامل (x^m) المساوي الى الصفر سوف يعطي علاقة التكرار وبالشكل التالي :

$$C_{m+2} = \frac{(m-1)(m-2)}{2(m+1)(m+2)}C_m$$

وهذه تعطي :

$$C_2 = \frac{2C_0}{2\times 1\times 2} = \frac{C_0}{2}$$
$$C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0, C_6 = 0$$

ويتبين إن جميع قيم المعاملات بعد (C_2) اصفاراً.

الخطوة الرابعة :

كتابة الحل :

$$y = C_0 + C_1x + C_2x^2 = C_0\left[1 + \frac{x^2}{2}\right] + C_1x$$

11.4 حل متسلسلات القوى بالقرب من النقطة الشاذة
Power Series Solution Near Singular point

وتعرف هذه الطريقة بطريقة فروبينس (Frobenius Method) وتكون خطوات الحل كما يلي :

الخطوة الأولى

الحل يكون بالشكل :

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$$

ونعوض (y'', y', y) في المعادلة التفاضلية المعطاة :

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^{m+r-1}\ ;\quad y'' = \sum(m+r)(m+r-1)C_m x^{m+r-2}$$

الخطوة الثانية :

نعيد ترتيب الحدود بالنسبة لقوى (x) ونساوي معامل اقل قوة لـ (x) الى الصفر ليعطي لنا المعادلة الأسية (Indicial Equation)، وبحل هذه المعادلة نحصل على جذرين هما (r_1, r_2) يحددان الحل النهائي للمسألة حيث تظهر ثلاث حالات :

الحالة (1) :

إذا كان $(r_1 - r_2 \neq 0)$ وليس عدد صحيح فيكون شكل الحل النهائي :

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_1)\, x^m$$

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_2)\, x^m$$

الحالة (2) :

إذا كان $(r_1 - r_2) = 0$ أو $(r_1 = r_2 = \alpha)$ فيكون الشكل النهائي :

الحل الأول (y_1) كما في الحالة (1) أما الحل الثاني (y_2) فسيكون $y_2 = \frac{\partial}{\partial r}(y_1)_{r=\alpha}$.

الحالة (3) :

إذا كان $(r_1 - r_2 = N)$.

حيث أن N : عدد صحيح.

أي إذا كان الجذران مختلفين (r_1, r_2) حيث إن $(r_1 > r_2)$ والفرق بينهما يساوي عدد صحيح فان الحل الأول يكون $(y_1)_{r=r_1}$ أما الحل الثاني (y_2) فيكون :

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r}\{(r - r_2) y_1\}_{r=r_2}$$

الخطوة الثالثة :

نساوي معاملات قوى (x) المختلفة إلى الصفر لتحديد $C_0, C_1, C_2, \cdots$ ، وأن معامل على قوة لـ (x) المساوي إلى الصفر يطلق عليه بصيغة التكرار (Recurrence Formula) .

الخطوة الرابعة :

نعوض قيم المعاملات $C_0, C_1, C_2, \cdots$ في الحل المفروض ليعطي هذا الحل النهائي للمعادلة التفاضلية المعطاة.

Ex.5 :

Solve in Series $\quad 4xy'' + 2y' + y = 0$

الحل :

ان شكل الحل سيكون : $\quad y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$

لأن $(x=0)$ هي نقطة مفردة.

الخطوة الأولى :

نكتب المعادلة التفاضلية المعطاة بمتسلسلة :

$$4x\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)\cdot C_m x^{m+r-2} +$$

$$2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)\cdot C_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

الخطوة الثانية :

$$\sum_{m=0}^{\infty} 4(m+r)(m+r-1)\cdot C_m x^{m+r-1} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(m+r)\cdot C_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} = 0$$

أو :

$$\sum_{m=0}^{\infty}[4(m+r)(m+r-1) + 2(m+r)]\, C_m x^{m+r-1} +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1} x^{m+r-1} = 0$$

أو :

$$[4r(r-1) + 2r]\cdot C_0 x^{r-1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\{4(m+r)(m+r-1) + (m+r)\}\cdot C_m + C_{m-1}\right] x^{m+r-1} = 0$$

بمساواة أقل قوة لـ (x) وهي (x^{r-1}) يعطي المعادلة الأسية (Indicial Equation).

$$[4r(r-1) + 2r]C_0 = 0$$

$$C_0 \neq 0$$

إذن :

$$4r(r-1) + 2r = 0$$

والتي تعطي :

$$r_1 = 0 \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad r_1 - r_2 = -\frac{1}{2}$$

إذن الحالة هي رقم (1).

الخطوة الثالثة :

بمساواة معامل (x^{m+r-1}) الى الصفر نحصل على صيغة التكرار (R.F.).

$$C_m = \frac{-C_{m-1}}{4(m+r)\left(m+r-\frac{1}{2}\right)}$$

الخطوة الرابعة :

الحل الأول (y_1) يكون عندما $(r=0)$:

$$C_m = \frac{-C_{m-1}}{4m\left(m-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-C_{m-1}}{2m(2m-1)}$$

عندما $(m=1)$: $\quad C_1 = \frac{-C_0}{2(1)} = \frac{-C_0}{2!}$

عندما $(m=2)$: $\quad C_2 = \frac{-C_1}{4(3)} = \frac{C_0}{4!}$

عندما $(m=3)$: $\quad C_3 = \frac{-C_2}{6(5)} = \frac{-C_0}{6!}$

عندما $(m=4)$: $\quad C_4 = \frac{-C_3}{8(3)} = \frac{C_0}{8!}, \cdots\cdots etc$

إذن الحل الأول يكون :

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_1)\, x^m \quad ; \quad r_1 = 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} C_m(r_1)\, x^m = C_0 - \frac{C_0}{2!}x + \frac{C_0}{4!}x^2 - \frac{C_0}{6!}x^3 + \cdots\cdots$$

$$= C_0\left[1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots\cdots\right] = C_0 \cos\sqrt{x}$$

الحل الثاني (y_2) يكون عندما $\left(r_2 = \frac{1}{2}\right)$، إذن علاقة التكرار تصبح:

$$C_m(r_2) = \frac{-C_{m-1}}{4\left(m+\frac{1}{2}\right)(m)}$$

أو : $$C_m(r_2) = \frac{-C_{m-1}}{2m(2m+1)}$$

عندما $(m=1)$: $\quad C_1 = \frac{-C_0}{2(3)} = \frac{-C_0}{3!}$

عندما $(m=2)$: $\quad C_2 = \frac{-C_1}{4(5)} = \frac{C_0}{5!}$

عندما $(m=3)$: $\quad C_3 = \frac{-C_2}{6(7)} = \frac{-C_0}{7!}$

عندما $(m=4)$: $\quad C_4 = \frac{-C_3}{8(9)} = \frac{C_0}{9!}, \cdots\cdots etc$

إذن الحل الثاني يكون :

$$y_2 = x^{1/2} \sum C_m(r_2)\, x^m = x^{1/2}\left[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$= x^{1/2}\left[C_0 - \frac{C_0}{3!}x + \frac{C_0}{5!}x^2 - \frac{C_0}{7!}x^3 + \cdots\cdots\right]$$

$$= C_0\left[x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - \frac{x^{7/2}}{7!} + \cdots\cdots\right] = C_0 \operatorname{Sin} \sqrt{x}$$

ويكون الحل العام : $\quad y = y_1 + y_2$

Ex.6 :

Solve in Series $\quad (x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-5x)\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

يكون شكل الحل : $\quad y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r} \quad$ لأن $(x=0)$ هي نقطة مفردة :

الخطوة الأولى :

نفرض $\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right)$ في المعادلة المعطاة ونعيد ترتيب الحدود لنحصل على :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)^2 C_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r+2)^2 C_m x^{m+r} = 0$$

الخطوة الثانية :

نساوي معامل أقل قوة لـ (x) الى الصفر لنحصل على المعادلة الأسية (Indicial Equation).

$$C_0 r^2 = 0$$

والتي تعطي (r=0,0).

ولأن كلا القيمتين متساوية ($r_1=r_2$) فإذن الحالة هي رقم (2).

الخطوة الثالثة :

نساوي معامل $\left(x^{m+1}\right)$ الى الصفر فنحصل على علاقة التكرار :

$$C_{m+1} = \frac{(m+r+2)^2}{(m+r+1)^2} C_m$$

وهذه تعطي :

$$C_1(r+1)^2 = (r+2)^2 C_0$$
$$C_2(r+2)^2 = (r+3)^2 C_1$$
$$C_3(r+3)^2 = (r+4)^2 C_2$$
$$\vdots$$

الخطوة الرابعة :

الحل الأول يعطى بـ :

$$y_1 = C_0 . x^r \left[1 + \frac{(r+2)^2}{(r+1)^2} x + \frac{(r+3)^2}{(r+1)^2} x^2 + \frac{(r+4)^2}{(r+1)^2} x^3 + \cdots\cdots \right]$$

لـ (r=0) وهذا يعطينا حل واحد ولإيجاد الحل الثاني كما يلي، بعد تعويض قيمة (y) في المعادلة التفاضلية المعطاة تعطي :

$$\left(x - x^2\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + (1-5x)\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)^2 C_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(m+r+2)^2 C_m x^{m+r}$$

$$= C_0 r^2 x^{r-1} + C_1(r+1)^2 x^r - C_0(r+2)^2 x^r + C_2(r+2)^2 x^{r+1} -$$

$$C_1(r+3)^2 x^{r+1} + C_3(r+3)^2 x^{r+2} - C_2(r+4)^2 x^{r+2} + \cdots\cdots = C_0 r^2 x^{r-1}$$

جميع الحدود الأخرى تساوي صفر حسب علاقة التكرار، والآن نفاضل طرفي المعادلة فيه الى (r) فنحصل على :

$$\left(x - x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + (1-5x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) - 4\frac{\partial y}{\partial r} =$$

$$C_0\left[2rx^{r-1} + x^{r-1}\ln x . r^2\right]$$

إذا كانت (r=0) نرى أن الجانب الأيمن يساوي صفر فإذن $\left(\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0}\right)$ هي أيضاً حل للمعادلة، فإذن الحل الثاني يكون بتفاضل (y) نسبة الى (r) ومن ثم نضع (r=0) في المشتقة.

إذن :

$$\frac{\partial y_1}{\partial r} = C_0 x^r \ln x\left[1 + \frac{(r+2)^2}{(r+1)^2}x + \frac{(r+3)^2}{(r+1)^2}x^2 + \cdots\cdots\right] +$$

$$C_0 x^r\left[\frac{(r+2)^2}{(r+1)^2}\left(\frac{2}{r+2} - \frac{2}{r+1}\right)x + \frac{(r+3)^2}{(r+1)^2}\left(\frac{2}{r+3} - \frac{2}{r+1}\right)x^2 + \cdots\right]$$

$$\therefore y_1\big|_{r=0} = C_0\left(1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + 5^2 x^4 + \cdots\cdots\right)$$

$$\left.\frac{\partial y_1}{\partial r}\right|_{r=0} = C_0 \ln x\left[1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \cdots\cdots\right] +$$

$$C_0\left[2^2(1-2)x + 3^2\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{1}\right)x^2 + \cdots\cdots\right]$$

إذن الحل العام يكون :

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A y_1\big|_{r=0} + B\left.\frac{\partial y_1}{\partial r}\right|_{r=0}$$

Ex. 7 :

Solve in series :

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

__الحل :__

بسبب (x=0) نقطة مفردة فإذن الحل يكون :

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+r}$$

الخطوة الأولى :

نعوض كل من $\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right)$ في المعادلة المعطاة ونعيد ترتيب الحدود بالنسبة لقوى (x) لنحصل على :

$$x(1-x)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)C_m x^{m+r-2}-3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)C_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}C_m x^{m+r}=0$$

أو : $$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)C_m x^{m+r-1}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r+1)^2 C_m x^{m+r}=0$$

الخطوة الثانية :

نساوي المعاملات الى الصفر ، وإن معامل أقل قوة لـ (x) يعطي المعادلة الأسية وكما يلي :

$$r(r-1)C_0=0$$

وهذا يعطي : $r=0$ أو : $r=1$

$$r_1-r_2=-1$$

إذن هنا تكون الحالة رقم (3).

الخطوة الثالثة :

نساوي معامل $\left(x^{m+r}\right)$ الى الصفر فنحصل على :

$$C_{m+1}=\frac{(m+r+1)^2}{(m+r)(m+r+1)}C_m=\frac{m+r+1}{m+r}C_m$$

وهذا يعطي :

$$C_1=\frac{r+1}{r}C_0 \;;\; C_2=\frac{r+2}{r+1}C_1=\frac{r+2}{r}C_0$$

$$C_3=\frac{r+3}{r+2}C_2=\frac{r+3}{r}C_0, \cdots\cdots \text{etc}$$

الخطوة الرابعة :

الحل الأول يكون عندما (r=1) :

$$y_1=C_0x\left(1+2x+3x^2+\cdots\cdots\right)$$

وعندما تكون (r=0) نجد أن المعاملات $C_1, C_2, \ldots\ldots$ جميعها غير محددة، لذلك فأن الحل العام يكون :

$$y_r=C_0x^r\left[1+\frac{r+1}{r}x+\frac{r+2}{r}x^2+\cdots\cdots\right]$$

ولإيجاد الحل الثاني نضرب كلا الطرفين بـ (r-0) ونفاضل نسبة الى (r) وهذا يعطي :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,y_r)=C_0x^r\cdot\ln x\left[r+(r+1)x+(r+2)x^2+\cdots\cdots\right]+$$

$$C_0x^r\left[1+x+x^2+\cdots\cdots\right]$$

وبوضع (r=0) نحصل على الحل الثاني وكما يلي :

$$y_2=C_0\ln x\left(x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots\right)+C_0\left(1+x+x^2+\cdots\cdots\right)$$

إذن الحل العام يعطى بـ : $y=Ay_1+By_2$

تمارين الفصل الحادي عشر

Solve in Series

(1) $y''-xy'+x^2y=0$

(2) $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0$

(3) $2x(1-x)y''+(1-x)y'+3y=0$

(4) $y''+x^2y=0$

(5) $3xy''+2y'+y=0$

(6) $y'=2xy$

(7) $(1+x)y'-(2x+y)y=0$

(8) $2\left(x^2+x^3\right)y''-\left(x-3x^2\right)y'+y=0$

(9) $2x^2y''-xy'+\left(1-x^2\right)y=0$

(10) $4xy''+2(1-x)y'-y=0$