solution of final 1 2017

Q1:- A)

الحـل:

أ- عـدد حـالات الاسـتجابة X متغيـر كمـي منفصـل ، ومـدى هـذا المتغيـر فـي هـذه الحالـة هـو: $X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال: $n=5$ ، $p=0.60$ ، $q=1-p=0.40$ إذا:

$$f(x)=\binom{n}{x}(p)^{x}(q)^{n-x}$$

$$=\binom{5}{x}(0.6)^{x}(0.4)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

ت- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء: $P(x=3)=f(3)$

$$f(3)=\binom{5}{3}(0.6)^{3}(0.4)^{5-3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times0.216\times0.16=10\times0.03456$$
$$=0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل: $P(x\ge1)$

$$P(x\ge1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1-f(0)$$
$$=1-\left[\binom{5}{0}(0.6)^{0}(0.4)^{5}\right]=1-1\times1\times0.01024=0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر: $P(x\le2)$:

$$P(x\le2)=f(2)+f(1)+f(0)$$

$$= \binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3 + \binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4 + \binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$
$$= \frac{5\times4}{2\times1}(0.36)(0.064) + \frac{5}{1}(0.6)(0.0256) + 1(1)(0.01024$$
$$= 0.2304 + 0.0768 + 0.01024 = 0.31744$$

ث- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق المعادلة (8-3)، وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\boxed{\mu = \sum x\ f(x) = np} \qquad (٨-٧)$$

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu = np = 5(0.60) = 3$$

- الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (8-4)، ومنها يمكن التوصل إلى الصورة التالية:

$$\boxed{\sigma^2 = npq} \qquad (٨-٨)$$

إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

Q1: B)

الحل:

نعتبر الأحداث التالية:

A : المسمار المسحوب الأول سليم، B : المسمار المسحوب الثاني سليم. فيكون المطلوب هو احتمال $A \cap B$

١) إذا كان السحب بإرجاع فإن الحدثين A و B مستقلان ومنه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 49\%$$

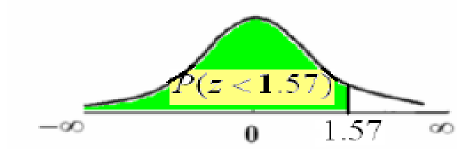
٢) إذا كان السحب بدون إرجاع فإن الحدثين A و B مرتبطان ومنه:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \cong 46.67\%$$

Q2: A)

الحل

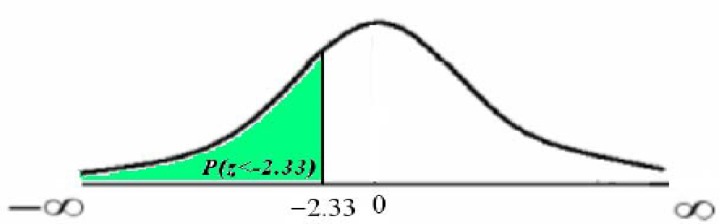
أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z<1.57)=F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي



ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

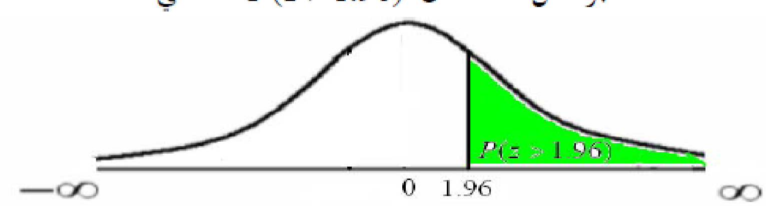
ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z<1.57)=F(1.57)=0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z<-2.33)=F(-2.33)$ موضحة كالتالي:



ومن ثم يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ كالتالي:



وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 نجد أن : $p(z<1.96)=0.9750$ ، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ هي:

وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

Q2: B)

نقطة العينة	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

الآن يمكننا إيجاد دالة الاحتمال التـى تتبـع المتغـير العشوائـى X وبافتراض أن قطعة العملة متوازنة. فإن

$$P(HH) = \frac{1}{4},\ P(HT) = \frac{1}{4},\ P(TH) = \frac{1}{4},\ P(TT) = \frac{1}{4}$$

وبالتالى

$$P(X = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P(HT \cup TH) = P(HT) + P(TH) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

وبالتالى فإن دالة الاحتمال يمكن الحصول عليها كالتالى

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

Q3: A)

(*a*) We note that

$$P(x_1) = 1 - P(x_0) = 1 - 0.5 = 0.5$$
$$P(y_0 \mid x_0) = q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.1 = 0.9$$
$$P(y_1 \mid x_1) = q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(y_0) = P(y_0 \mid x_0)P(x_0) + P(y_0 \mid x_1)P(x_1) = 0.9(0.5) + 0.2(0.5) = 0.55$$
$$P(y_1) = P(y_1 \mid x_0)P(x_0) + P(y_1 \mid x_1)P(x_1) = 0.1(0.5) + 0.8(0.5) = 0.45$$

(*b*) Using Bayes' rule (*1.42*), we have

$$P(x_0 \mid y_0) = \frac{P(x_0)P(y_0 \mid x_0)}{P(y_0)} = \frac{(0.5)(0.9)}{0.55} = 0.818$$

(*c*) Similarly,

$$P(x_1 \mid y_1) = \frac{P(x_1)P(y_1 \mid x_1)}{P(y_1)} = \frac{(0.5)(0.8)}{0.45} = 0.889$$

(*d*) The probability of error is

$$P_e = P(y_1 \mid x_0)P(x_0) + P(y_0 \mid x_1)P(x_1) = 0.1(0.5) + 0.2(0.5) = 0.15.$$

Q3: B)

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Q4: A)

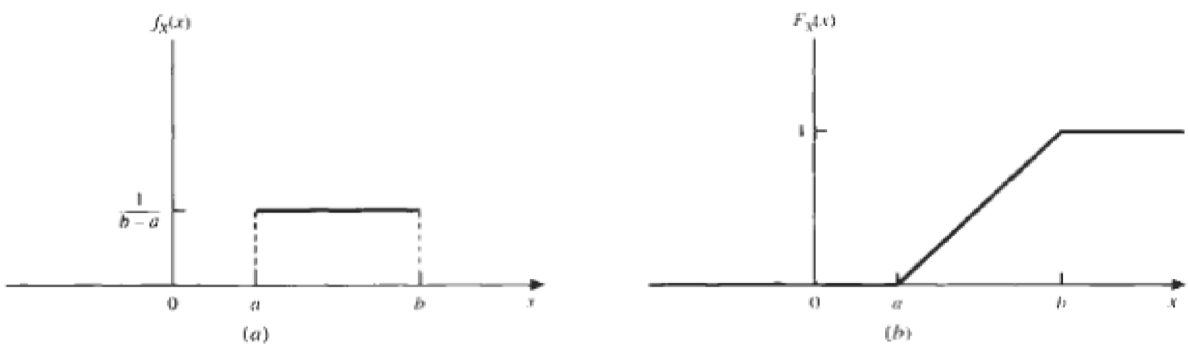
A r.v. X is called a uniform r.v. over (a, ***b)*** if its pdf is given by

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The corresponding cdf of X is

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Figure 2-7 illustrates a uniform distribution.



. the mean of X is

$$\mu_X = E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \tfrac{1}{2}(b+a)$$

.ve

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b = \tfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

the variance of X is

$$\begin{aligned}\sigma_X{}^2 &= \operatorname{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \tfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2) - \tfrac{1}{4}(b+a)^2 = \tfrac{1}{12}(b-a)^2\end{aligned}$$

Q4: B)

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

Q5: A)

(*a*) The range of X is $R_X = \{1, 2, 3\}$.

(*b*) $P(X = 1) = P[\{a\}] = P(a) = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P[\{b\}] = P(b) = \frac{1}{4}$

$P(X = 3) = P[\{c, d\}] = P(c) + P(d) = \frac{1}{4}$

$P(X > 3) = P(\varnothing) = 0$

(*a*) From the result of Prob. 2.3 and Eq. (*2.18*), we have

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

which is sketched in Fig. 2-11. The r.v. X is a discrete r.v.

(*b*) (i) We see that

$$P(X \le 1) = F_X(1) = \frac{1}{2}$$

(ii) By Eq. (*2.10*),

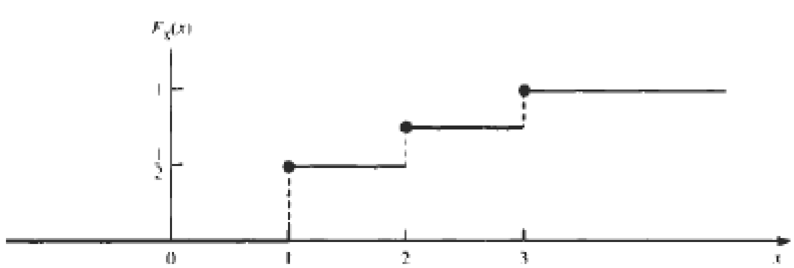
$$P(1 < X \le 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) By Eq. (*2.11*),

$$P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(iv) By Eq. (*2.64*),

$$P(1 \le X \le 2) = P(X = 1) + F_X(2) - F_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$



Q5: B)

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0